

Bruchmechanische Untersuchungen für ein elastisches, homogenes und symmetrisches mikromorphes Kontinuum

Cracktip-fields of an elastic, homogeneous and symmetric micromorphic continuum

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation von Jan Frischmann aus Darmstadt

Tag der Einreichung: 26.03.2019, Tag der Prüfung: 16.05.2019

Darmstadt — D 17

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Bau- und Umweltinge-
nieurwesen
Institut Kontinuumsmechanik

Bruchmechanische Untersuchungen für ein elastisches, homogenes und symmetrisches mikromorphes Kontinuum
Cracktip-fields of an elastic, homogeneous and symmetric micromorphic continuum

Genehmigte Dissertation von Jan Frischmann aus Darmstadt

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Wilfried Becker

Tag der Einreichung: 26.03.2019

Tag der Prüfung: 16.05.2019

Darmstadt – D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

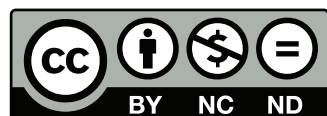
URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-88302

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Keine kommerzielle Nutzung – Keine Bearbeitung 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de>

Kurzfassung

Reale Werkstoffe besitzen eine Mikrostruktur, der charakteristische innere Längen zugeordnet werden. In vielen Anwendungen kann die Mikrostruktur maßgeblich Einfluss auf das makroskopische Materialverhalten nehmen. Dies äußert sich beispielsweise bei statischen Versuchen durch Längenskaleneffekte und bei dynamischen Versuchen durch nicht-klassische Dispersionsrelationen. Solche Phänomene werden sowohl im mikroskopischen Bereich (dünne Filme, Nanoröhren, Klebverbindungen, usw.) als auch im makroskopischen Bereich (Erdplatten, Umrandungen von Tunneln im Erdreich, usw.) beobachtet. Sie können im linearen Bereich durch Materialgleichungen der Gradientenelastizität beschrieben werden. Die Arbeit befasst sich mit einem Modell der Gradientenelastizität, das auf LAPLACE-Ableitungen der Spannungen und der Dehungen basiert. Die Hauptuntersuchungen beziehen sich auf das Verhalten des Modells an Rissspitzen hinsichtlich von Modus-*I*- und Modus-*II*-Beanspruchungen. Es wird bewiesen, dass im Unterschied zu der in der Fachliteratur vertretenen Ansicht, die aus der klassischen Elastizität bekannten Singularitäten nicht behoben werden. Nichtsdestotrotz gibt es signifikante Abweichungen zu der klassischen Elastizität, die in der Arbeit umfassend analysiert werden.

Abstract

Real materials exhibit a substructure (microstructure), which can be captured by characteristic material internal lengths. The microstructure can strongly effect the macroscopic response in many applications. Such phenomena have been observed e.g. in statics, in form of lengthscale effects in the material response, and in dynamics in form of non-classical dispersion relations. The examples cover, among others, in the microscopic range the response of thin films, nanotubes and adhesive joints, and in the macroscopic range the response of earth plates and lining of tunnels in soil. The observed effects can be addressed adequately in the linear range by constitutive laws of gradient elasticity. The present work is concerned with a Gradientelasticity model, which is based on both, the Laplacian of the strain and the Laplacian of the stress. The main investigations focus on the near tip fields within Mode-*I*- and Mode-*II*-crack-problems. It is proved, that, in contrast to the perspective of some others, the model does not avoid the well known singularities in classical elasticity. Nevertheless there are significant differences in comparison to classical elasticity when considering crack problems. Such differences are discussed in detail on the basis of closed form analytical solutions as well as finite element simulations.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
1.1. Literaturüberblick	5
1.2. Thema der Arbeit	7
1.3. Notation	9
2. Theorie der mikromorphen Kontinua	13
2.1. Kinematik klassischer Kontinua	13
2.2. Kinematik mikromorpher Kontinua	16
2.3. Asymptotische Entwicklung der Verzerrungstensoren	18
2.4. Freie Energiefunktion (pro Volumeneinheit)	19
2.5. Positive Definitheit der freien Energiefunktion	21
2.6. Prinzip der virtuellen Arbeit	22
2.7. Massenbilanz	25
2.8. Ebener Verzerrungszustand	25
2.9. Kompatibilitätsbedingungen	26
2.10. Spezialfall der linearen Elastizität	26
2.11. Folgerung des Modells: IG-Modell und HELMHOLTZ-Gleichung	27
2.12. Zusammenfassung der Theorie	28
3. Analytische Diskussion von Rissspitzenfeldern	29
3.1. Grundgleichungen in Polarkoordinaten	29
3.2. Randbedingungen	31
3.3. Symmetriebedingungen	33
3.4. Potenzreihenansatz nach Williams	34
3.4.1. Gleichgewichtsbedingungen	35
3.4.2. HELMHOLTZ-Gleichung	36
3.4.3. Kompatibilitätsbedingung	37
3.4.4. Zusammenfassung der Differentialgleichungen der Terme k -ter Ordnung	40
3.5. Diskussion der Spannungswinkelfunktionen	42
3.5.1. Spannungswinkelfunktionen nullter Ordnung	42
3.5.2. Spannungswinkelfunktionen erster Ordnung	46
3.6. Diskussion der Mikrodehnungswinkelfunktionen	48
3.6.1. Mikrodehnungswinkelfunktionen nullter Ordnung	48
3.6.2. Mikrodehnungswinkelfunktionen erster Ordnung	52
3.7. Diskussion der Hyperspannungswinkelfunktionen	56
3.7.1. Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung	58
3.7.2. Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung	60
3.8. Alternative und äquivalente Bestimmung der Rissspitzennahfelder	61
3.9. Spannungsintensitätsfaktoren	64
3.10. Hyperspannungsintensitätsfaktoren	65
3.11. Zusammenfassung	66

4. Numerische Diskussion von Rissspitzenfeldern	71
4.1. Herleitung der Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode	72
4.1.1. Variationsformulierung der Gleichgewichtsbedingungen	73
4.1.2. Diskretisierung des Integrationsgebietes	74
4.2. Gelochte Scheibe	78
4.3. Randriss im homogenen Material	81
4.3.1. Finite-Elemente-Modellierung	81
4.3.2. Randbedingungen und Materialparameter	83
4.3.3. Auswertung	84
4.3.4. Ergebnisse für Modus I	86
4.3.5. Ergebnisse für Modus II	90
4.4. Randriss im Zweistoffverbund	95
4.4.1. Randbedingungen und Materialeigenschaften	96
4.4.2. Ergebnisse	97
5. Zusammenfassung	101
Literatur	103
A. Zylinderkoordinaten (r, φ, z)	107
A.1. Grundbegriffe	107
A.1.1. Basisvektoren	107
A.1.2. Metrikkoeffizienten	107
A.1.3. Physikalisches Basissystem	108
A.1.4. Christoffelsymbole	108
A.1.5. Kovariante Ableitung	109
A.2. Gradient eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten	109
A.3. Divergenz eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten	112
A.4. Gradient des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten	113
A.5. LAPLACE-Ableitung eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten	118
A.6. Kompatibilitätstensor eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten	120
A.7. Gradient eines Tensors dritter Stufe in Zylinderkoordinaten	122
A.8. Divergenz eines Tensors dritter Stufe in Zylinderkoordinaten	124
B. Implementierung in FEAP	125

1 Einleitung

1.1 Literaturüberblick

Bei der kontinuumsmechanischen Diskussion von Problemen beispielsweise der Nanotechnologie, der Mikrosystemtechnik, der Mikrophysik oder aber beim Studium von dünnen Filmen haben sogenannte Gradientenmodelle eine große Bedeutung. In solchen Problemen können die lateralen Abmessungen in derselben Größenordnung wie die inneren Längenskalen des Materials liegen. Die Folge davon ist ein sogenannter Längenskaleneffekt, der experimentell beispielsweise in den Mikrotorsionsexperimenten von FLECK ET AL. [14] oder auch in den Mikrobiegeexperimenten von STÖLKEN & EVANS [39] beobachtet wurde. Der Längenskaleneffekt äußert sich dadurch, dass bei der Auftragung geeignet entdimensionierter Lasten über einer entdimensionierten Deformation unterschiedliche Verläufe in Abhängigkeit der Geometrie gemessen werden. Im Gegensatz dazu liegen zum Beispiel alle Verläufe infolge des klassischen HOOKESchen Gesetzes übereinander. Auch bei Lokalisierungen der Deformation von mikroskopischen Proben ist die Breite der beobachteten lokalisierten Zone von derselben Größenordnung wie typische mikroskopische Längen des Materials. Aus STÖLKEN & EVANS-[39] wissen wir ebenfalls, dass konventionelle Stoffgesetze die experimentell gemessene Breite von Scherbändern nicht beschreiben. Stoffgesetze mit höheren Gradienten der Deformation hingegen sind in der Lage, solche Phänome zu modellieren. Daher konzentriert sich weltweit die aktuelle Forschungsaktivität unter anderem auf den Bereich derartiger mehrskaliger Materialmodelle.

Eine besondere Rolle spielen die sogenannten mikromorphen Kontinua, die die Existenz einer „Mikrokontinuum“ genannten Substruktur annehmen. Das Mikrokontinuum soll sich unabhängig vom makroskopischen Kontinuum deformieren können und induziert somit neue Freiheitsgrade der Deformation. Ein Spezialfall der mikromorphen Kontinua sind die mikropolaren Kontinua, die die Deformation des Mikrokontinuums auf eine Rotation einschränken. Sowohl die mikromorphen als auch die mikropolaren Kontinua erweitern somit die klassischen Materialmodelle. Sie besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass die CAUCHYSche Spannung im Allgemeinen nicht mehr symmetrisch ist, was die Diskussion einer zusätzlichen Feldgleichung für nicht–klassische Spannungen erforderlich macht. Im Falle mikropolarer Kontinua heißt diese nicht–klassische Spannung Momentenspannung und im Falle eines mikromorphen Kontinuums Hyperspannung. Die Entwicklung dieser Theorien wurde entscheidend durch die Arbeiten von MINDLIN [32], ERINGEN [12], [11] bzw. ERINGEN & SUHUBI [13] geprägt. Den Begriff „mikromorph“ hat ERINGEN [12] eingeführt, aber wir bezeichnen ebenfalls die Theorie mikrostrukturierter Kontinua von MINDLIN [32] als mikromorph, da beide Theorien im Wesentlichen äquivalent zueinander sind.

Einen weiteren Zugang bilden die Gradientenmodelle ohne Mikrostruktur. Diese sind weniger komplex als die mikromorphen Theorien, werden mit einer weiterhin symmetrischen Spannung formuliert und enthalten im Allgemeinen weniger Materialparameter als die analogen mikromorphen Modelle. In den letzten zwei Jahrzehnten waren ganz besonders die Modelle der Gradientenelastizität Gegenstand der Forschung in der Festkörpermechanik. Für einen Überblick der Entwicklungen dieser Forschung sei auf ASKES & AIFANTIS [4] verwiesen. Viele Gradientenelastizitätsmodelle wurden als Spezialfall der mikromorphen Theorien gewonnen, indem angenommen wurde, dass die Deformationen des Makro- und des Mikrokontinuums zusammenfallen (siehe z. B. MINDLIN & ESHEL [33]).

Man unterteilt die Modelle der Gradientenelastizität in explizite und implizite Modelle, je nachdem ob es eine explizite Angabe der CAUCHYSchen Spannung als Funktion der Dehnung und ihrer Gradienten gibt oder nicht (siehe ASKES & GUTIÉRREZ [5]). Das einfachste Modell der expliziten Gradientenelastizität, das wir im Folgenden auch als **klassische Gradientenelastizität** oder **KG-Modell** bezeichnen wollen, ist eine Beziehung zwischen der Spannung Σ , der Dehnung ϵ sowie deren LAPLACE-Ableitung $\Delta\epsilon$:

$$\Sigma = \epsilon : \mathbb{C} - c_2 \Delta\epsilon : \mathbb{C} . \quad (1.1)$$

Dieses Modell verwendet den klassischen Elastizitätstensor vierter Stufe \mathbb{C} und einen zusätzlichen nicht-klassischen Materialparameter c_2 . Die Gleichung (1.1) macht den Anschein einer Materialgleichung, da sie eine Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungsgrößen herstellt. Als Erweiterung des HOOKEschen Gesetzes, das nur den Term proportional zur Dehnung ϵ enthält, führt diese Gleichung noch einen zur LAPLACE-Ableitung der Dehnung proportionalen Term ein. Das Modell (1.1) wurde ad hoc durch ALTAN & AIFANTIS [3] als Materialgleichung eingeführt und es wurde gezeigt, dass die bei Versetzungs- und Rissspitzenproblemen auftretenden Dehnungssingularitäten eliminiert werden. Es wurde unter anderem von ALTAN & AIFANTIS [2], GEORGIADIS [16] sowie PAPARGYRI-BESKOU ET AL. [34] erkannt, dass das KG-Modell (1.1) als Spezialfall der mikromorphen Elastizitätstheorie von MINDLIN [32] herleitbar ist.

Die sogenannte **implizite Gradientenelastizität** entwickelte sich aus dem Versuch, sowohl die Dehnungs- als auch die Spannungssingularitäten durch Berücksichtigung eines zusätzlichen Terms zu eliminieren. Als Ad-hoc-Erweiterung des KG-Modells (1.1) um einen Term proportional zum LAPLACE-Operator der Spannung $\Delta\Sigma$ führten GUTKIN & AIFANTIS [20] das folgende Modell ein, das wir als **IG-Modell** bezeichnen wollen:

$$\Sigma - c_1 \Delta\Sigma = \epsilon : \mathbb{C} - c_2 \Delta\epsilon : \mathbb{C} . \quad (1.2)$$

Der zusätzliche Term enthält einen weiteren Materialparameter c_1 zu dem bereits im KG-Modell (1.1) eingeführten Materialparameter c_2 und dem klassischen Elastizitätstensor \mathbb{C} . ASKES & AIFANTIS [4] und die darin zitierten Werke haben aufbauend auf dem RU-AIFANTIS-Theorem (siehe RU & AIFANTIS [36]) behauptet, dass das IG-Modell (1.2) sowohl für Versetzungs- als auch für Rissspitzenprobleme die Dehnungs- sowie die Spannungssingularitäten eliminiert.

Auf dem Gebiet der Versetzungstheorien wurde von LAZAR & POLYZOS [30] sowie von LAZAR ET AL. [29] gezeigt, dass die Anwendung des RU–AIFANTIS–Theorems bei solchen Problemstellungen problematisch ist. Die Argumentation von LAZAR ET AL. [29] bezieht sich auf eine geeignete Interpretation der Feld- und Materialgleichungen sowie auf eine korrekte Formulierung der erforderlichen Randbedingungen. Allerdings haben auch diese Autoren nicht die korrekten Randbedingungen formuliert. Generell entsteht die Frage, ob die Anwendung des Ru–Aifantis–Theorems unzulässig ist. MADEO ET AL. [31] greifen den Aspekt der korrekten Formulierung der Randbedingungen für spezielle Modelle der Gradientenelastizität auf.

Die Ad–hoc–Einführung des IG–Modells lässt ebenfalls die Frage offen, ob das IG–Modell (1.2) eine Materialgleichung, eine Bilanzgleichung, eine Kombination dieser beiden Gleichungstypen oder etwas völlig Neues ist. BRÖSE ET AL. [8] haben diese Fragestellung thematisiert. Es wurde gezeigt, dass es sich um eine Kombination aus den Bilanzgleichungen und Materialgleichungen handelt. Dort werden auch die korrekten Randbedingungen aufgestellt.

1.2 Thema der Arbeit

Ein wichtiges Themenfeld von linearen sowie erweiterten Elastizitätstheorien stellt die Diskussion von Rissspitzenfeldern dar. Bei der klassischen linearen Elastizitätstheorie weisen sowohl die Dehnungen als auch die Spannungen an der Rissspitze eine $\frac{1}{\sqrt{r}}$ –Singulartät auf. Für das KG–Modell (1.1) werden zwar, wie bereits erwähnt, die Dehnungen an der Rissspitze regulär, die Spannungen bleiben hingegen singulär. In DIEGELE ET AL. [9] und in ELSÄSSER [10] wird die lineare mikropolare Elastizität diskutiert und gezeigt, dass die Dehnungen und die Spannungen für diese Materialmodelle weiterhin singulär mit einer Singularitätsordnung $\frac{1}{\sqrt{r}}$ sind. In [10] wird auch demonstriert, wie mit Hilfe von Berechnungen der Finite–Elemente–Methode die Spannungsintensitätsfaktoren für Modus *I* bzw. Modus *II* bestimmt werden können.

Sowohl ALBER ET AL. [1] als auch BRÖSE ET AL. [8] haben einige Modelle der Gradientenelastizität eingehend diskutiert. Die Autoren zeigen, dass diese, insbesondere das KG–Modell (1.1), als Sonderfall der mikromorphen Elastizität herleitbar sind. Auch zeigen diese Autoren, dass sowohl das KG– als auch das IG–Modell als klassisches Kontinuum im Rahmen einer nicht–klassischen Thermodynamik behandelt werden kann. Allerdings gibt es bisher keine systematischen Untersuchungen des Verhaltens der impliziten Gradientenelastizität. Ziel der vorgelegten Dissertation ist es daher, das IG–Modell (1.2) systematisch im Hinblick auf die Form der Rissspitzenfelder zu untersuchen. Dazu werden wir eine geeignete freie Energiefunktion formulieren und die erforderlichen Bilanzgleichungen sowie die zugehörigen Randbedingungen angeben. Anschließend werden wir, auch anhand eines geeigneten Beispiels, die auftretenden Materialparameter des IG–Modells diskutieren. Als Hauptteil dieser Arbeit werden wir die Rissspitzennahfelder analytisch bestimmen und einige numerische Beispielrechnungen zur Diskussion typischer Eigenschaften des IG–Modells betrachten.

In BRÖSE ET AL. [8] wurde das IG-Modell (1.2) als eine Kombination aus Bilanz- und Materialgleichungen erkannt. Diesen Autoren folgend werden wir das IG-Modell (1.2) als einen Sonderfall der mikromorphen Elastizität herleiten und eine geeignete freie Energiefunktion aufstellen. Um die komplexe Diskussion zu vereinfachen, schränken wir uns auf eine quasistatische Belastung ohne volumenverteilte Kräfte und Doppelkräfte ein. Das mikromorphe Kontinuum zusammen mit einer klassischen Thermodynamik stellt einen geeigneten Rahmen für diese Diskussion dar. Aus thermodynamischen Restriktionen gewinnen wir gemäß BRÖSE ET AL. [8] Bedingungen an die Materialparameter c_1 und c_3 . Wir geben weiter einige Materialparameterstudien nach dem Vorbild von HOFER [23] an. Um die Güte des dabei genutzten Finite-Elemente-Codes zu verifizieren, vergleichen wir die numerischen Ergebnisse mit den analytischen Spannungskonzentrationsfaktoren für klassische und mikropolare Elastizität der Literatur.

Als Hauptteil der Arbeit werden wir die Rissspitzenfelder unter Modus *I* und Modus *II* sowohl analytisch als auch numerisch untersuchen. Für die analytische Diskussion entwickeln wir die Felder asymptotisch gemäß WILLIAMS [41]. Hier ist eine geeignete Formulierung der Rand- sowie Symmetriebedingungen von zentraler Bedeutung. WILLIAMSartige asymptotische Entwicklungen, die eine sehr effektive Methode für bruchmechanische Problemstellungen sind, führen unter relativ einfachen mathematischen Voraussetzungen zu analytischen Formeln für die Rissspitzennahfelder. Es sei angemerkt, dass eine WILLIAMSartige Separation der Nahfelder in Potenzen des Radius und der Winkelfunktionen nicht für alle Stoffgesetze zielführend ist. So zeigt SHI ET AL. [38], dass eine solche Separation für das nicht-lineare Materialmodell von GAO ET AL. [15] und HUANG ET AL. [24] nicht existiert. Der Beweis dafür basiert auf der Tatsache, dass die Differentialgleichung zur Bestimmung des Exponenten keine Lösung besitzt. Das Materialgesetz in unserem Fall ist hingegen, wie wir sehen werden, linear und wir erwarten daher, dass die Methode nach WILLIAMS [41] erfolgreich angewendet werden kann. In der Tat wird diese Erwartung a posteriori dadurch gerechtfertigt, dass alle Gleichungen Lösungen besitzen und dass sowohl die analytischen als auch die numerischen Resultate für die Nahfelder der Rissspitze sehr gut übereinstimmen.

Anhand der analytischen Rechnungen werden wir überprüfen, ob das IG-Modell (1.2) tatsächlich die Singularitäten der Spannungen eliminiert. Wir führen die numerische Betrachtung der Rissspitzenfelder anhand der Finite-Elemente-Methode durch, indem wir eigenständige zweidimensionale Elemente entwickeln und implementieren. Weiter betrachten wir einen horizontalen Riss, der senkrecht von der Oberfläche eines homogenen Materials ins Innere verläuft. Durch Aufbringung geeigneter Randbedingungen diskutieren wir eine reine Modus-*I*- und Modus-*II*-Belastung und **werden zeigen, dass im Gegensatz zu den Behauptungen von AIFANTIS ET AL. [4] sowohl die Dehnungen als auch die Spannungen in der Nähe der Rissspitze singulär bleiben.** Entsprechende Intensitätsfaktoren werden eingeführt und mit Hilfe von Finite-Elemente-Rechnungen bestimmt. Anlass zur Verwendung von Modellen der Gradientenelastizität geben auch charakteristische Längen, die durch die Geometrie der Struktur vorgegeben sind. Ein solcher Fall liegt für einen Zweistoffverbund mit einem Riss parallel zur Trennfläche vor. Als charakteristische Länge dient der Abstand des Risses zur Trennfläche. Neben dem sogenannten Randriss wird auch dieses bruchmechanische Problem analysiert und die Ergebnisse mit denjenigen der klassischen Elastizität verglichen.

1.3 Notation

Für Tensoren nullter Stufe (Skalare) werden wir normale Kursivschrift t, c_1, α , usw. nutzen. Tensoren erster, zweiter und dritter Stufe stellen wir in fettgedruckter Kursivschrift $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{H}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Psi}, \dots$ dar. Für Tensoren der vierten und höherer Stufen verwenden wir doppelgestrichene Zeichen in Fettschrift $\mathbb{1}, \mathbb{I}, \dots$. Weiter bezeichnen wir mit \mathbf{T}^T die Transponierte und mit $\det \mathbf{T}$ die Determinante eines Tensors zweiter Stufe \mathbf{T} . Die Inversion eines Tensors zweiter Stufe \mathbf{T} führt auf die Inverse \mathbf{T}^{-1} .

Wir nutzen im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Indizes für unterschiedliche Koordinatensysteme. Ein griechischer Index $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ deutet immer die Komponente bezüglich eines krummlinigen Basissystems $\{\mathbf{g}_\alpha\}$ bzw. $\{\mathbf{g}^\alpha\}$ an. Hingegen bezieht sich ein lateinischer Index $i \in \{1, 2, 3\}$ immer auf eine Tensorkomponente bezüglich einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_i\}$. Für die Komponenten von Matrizen wollen wir ferner großgeschriebene lateinische Indizes I verwenden. Für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha}$ nach der α -ten Koordinate Θ^α wollen wir kurz ∂_α schreiben und die entsprechende kovariante Ableitung notieren wir durch $|_\alpha$. Wir folgen der EINSTEINSchen Summenkonvention und summieren, sofern nichts anderes gesagt wird, über doppelt auftretende Indizes.

Sei \mathbb{E} ein EUKLIDISCHER Vektorraum und sei $\mathbb{E}^i := \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}$ das i -fache Produkt des Raumes \mathbb{E} mit sich selbst. Der Raum der Tensoren i -ter Stufe, also der Raum der i -fach multilineareren Abbildungen, sei mit $\mathcal{L}(\mathbb{E}^i, \mathbb{R})$ bezeichnet. Im Großteil der vorgelegten Arbeit wollen wir nicht zwischen der Notation einer Funktion und ihren Funktionswerten unterscheiden und verzichten auf die explizite Angabe der Variablen. Wenn es relevant ist, werden wir die volle Notation an der entsprechenden Stelle nutzen.

Bezüglich einer orthonormalen Basis sind die Komponenten des Permutationstensors ϵ , die sogenannten Permutationssymbole ϵ_{ijk} , durch folgende Vorschrift definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ -1 & \text{für } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (1.3)$$

Weiter lassen sich durch das sogenannte KRONECKER-Delta δ_{ij} ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} , \quad (1.4)$$

die Komponenten bezüglich einer orthonormalen Basis des Einheitstensors der zweiten Stufe $\mathbf{1}$, der vierten Stufe $\mathbb{1}$ sowie des symmetrisierten Einheitstensors vierter Stufe $\mathbb{1}_S$ wie folgt darstellen:

$$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij} , \quad (\mathbb{1})_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} , \quad (\mathbb{1}_S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (1.5)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir verschiedene Produkte zwischen Tensoren verwenden:

- Das **dyadische Produkt** \otimes ist eine assoziative Multiplikation, die einen Tensor i -ter Stufe und einen Tensor j -ter Stufe auf einen Tensor $(i + j)$ -ter Stufe abbildet:

$$\otimes : \mathcal{L}(\mathbb{E}^i, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^j, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{i+j}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \otimes \mathcal{S} . \quad (1.6)$$

- Die einfache **Kontraktion** \cdot ist ein nicht assoziatives Produkt, das einen Tensor i -ter Stufe ($i \geq 1$) und einen Tensor j -ter Stufe ($j \geq 1$) auf einen Tensor $(i + j - 2)$ -ter Stufe abbildet:

$$\cdot : \mathcal{L}(\mathbb{E}^i, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^j, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{i+j-2}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \cdot \mathcal{S} . \quad (1.7)$$

Wir können die einfache Kontraktion auf eine mehrfache Kontraktion verallgemeinern, bei der sich pro involvierter Kontraktion die Voraussetzungen an die Tensorstufen i, j um 1 erhöhen und die Tensorstufe des Bildtensors um 2 verringert. Explizit erwähnen wollen wir an dieser Stelle die doppelte Kontraktion „ $\cdot\cdot$ “ ($i, j \geq 2$) bzw. die dreifache Kontraktion „ $\cdot\cdot\cdot$ “ ($i, j \geq 3$):

$$\cdot\cdot : \mathcal{L}(\mathbb{E}^i, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^j, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{i+j-4}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \cdot\cdot \mathcal{S} , \quad (1.8)$$

$$\cdot\cdot\cdot : \mathcal{L}(\mathbb{E}^i, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^j, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{i+j-6}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \cdot\cdot\cdot \mathcal{S} . \quad (1.9)$$

Die k -fache Kontraktion \cdot_k definiert auf natürliche Weise ein Skalarprodukt \langle, \rangle_k auf dem Raum der Tensoren k -ter Stufe. Für die einfache, doppelte bzw. dreifache Kontraktion gilt:

$$\langle, \rangle_1 : \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_1 := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_i b_i , \quad (1.10)$$

$$\langle, \rangle_2 : \mathcal{L}(\mathbb{E}^2, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle_2 := \mathbf{T} : \mathbf{S} := T_{ij} S_{ij} , \quad (1.11)$$

$$\langle, \rangle_3 : \mathcal{L}(\mathbb{E}^3, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \rangle_3 := \boldsymbol{\mu} \cdot\cdot\cdot \boldsymbol{\nu} := \mu_{ijk} \nu_{ijk} . \quad (1.12)$$

Sowohl die k -fache Kontraktion \cdot_k Tensoren höherer Stufe als auch die k -fache Kontraktion \cdot_k Tensoren unterschiedlicher Stufe lässt sich durch das Skalarprodukt \langle, \rangle_k Tensoren k -ter Stufe ausdrücken. Gehen wir davon aus, dass wir den ersten Faktor als dyadisches Produkt aus einem Tensor l -ter Stufe und einem Tensor k -ter Stufe beziehungsweise den zweiten Faktor als dyadisches Produkt aus einem Tensor k -ter und einem Tensor m -ter Stufe darstellen können, so gilt:

$$(\mathcal{M} \otimes \mathcal{H}_1) \cdot_k (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{N}) := \langle \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \rangle_k \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^{l+m}, \mathbb{R}) . \quad (1.13)$$

Die k -fache Kontraktion \cdot_k definiert auch auf natürliche Weise eine Multiplikationsabbildung im Vektorraum $\mathcal{L}(\mathbb{E}^{2k}, \mathbb{R})$ der Tensoren $2k$ -ter Stufe. Für zwei Tensoren zweiter Stufe $T = a \otimes b$, $S = c \otimes d$ bildet beispielsweise die einfache Kontraktion das übliche Produkt:

$$T \cdot S := (a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = \langle b, c \rangle_1 a \otimes d = (b \cdot c) a \otimes d \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^2, \mathbb{R}). \quad (1.14)$$

Entsprechend erhalten wir das Produkt zweier Tensoren vierter Stufe $\mathbb{T} := a \otimes b \otimes c \otimes d$ und $\mathbb{S} := e \otimes f \otimes g \otimes h$ durch folgende Vorschrift:

$$\mathbb{T} : \mathbb{S} = \left[(c \otimes d) : (e \otimes f) \right] (a \otimes b \otimes g \otimes h) = (c \cdot e) (d \cdot f) (a \otimes b \otimes g \otimes h). \quad (1.15)$$

- Für Tensoren zweiter und höherer Stufe definieren wir noch eine spezielle doppelte Kontraktion:

$$\odot : \mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}^k \times \mathbb{E}, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}^l \times \mathbb{E}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{k+l}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \odot \mathcal{S}. \quad (1.16)$$

Die Kontraktionen werden hierbei gewissermaßen „über Kreuz“ ausgeführt. Für Tensoren, die sich als Produkt $\mathcal{T} = a \otimes \mathcal{P} \otimes b$ bzw. $\mathcal{S} = c \otimes \mathcal{Q} \otimes d$ darstellen lassen, soll beispielsweise gelten:

$$\mathcal{T} \odot \mathcal{S} := \left[(a \otimes b) : (c \otimes d)^T \right] \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} = (a \cdot d) (b \cdot c) \mathcal{P} \otimes \mathcal{Q}. \quad (1.17)$$

- Das verallgemeinerte **Kreuzprodukt** \times definieren wir mit Hilfe des Permutationstensors ϵ :

$$\times : \mathcal{L}(\mathbb{E}^k, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{E}^l, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}^{k+l-1}, \mathbb{R}) : (\mathcal{T}, \mathcal{S}) \mapsto \mathcal{T} \times \mathcal{S} := \epsilon \odot (\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}). \quad (1.18)$$

Um die Differentialoperatoren des Gradienten, der Divergenz sowie der verallgemeinerten Rotation (curl) darzustellen, bedienen wir uns der üblichen Notation, den Nabla-Operator ∇ als Tensor erster Stufe zu interpretieren. Diese Interpretation ermöglicht es uns, die Differentialoperatoren angewendet auf einen Tensor $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}^k, \mathbb{R})$, $k \geq 1$ folgendermaßen darzustellen:

$$\text{grad}(\mathcal{T}) = \nabla \otimes \mathcal{T} \equiv \nabla \mathcal{T}, \quad \text{div}(\mathcal{T}) = \nabla \cdot \mathcal{T}, \quad \text{curl}(\mathcal{T}) = \nabla \times \mathcal{T}. \quad (1.19)$$

Für einen Tensor zweiter Stufe T definieren wir folgende Komponentendarstellungen:

$$(\nabla T)_{ijk} =: T_{jk}|_i, \quad (\nabla \cdot T)_i =: T_{ji}|_j, \quad (\nabla \times T)_{ij} =: \epsilon_{kil} T_{jk}|_l. \quad (1.20)$$



2 Theorie der mikromorphen Kontinua

In diesem Kapitel werden wir die Grundlagen der mikromorphen Kontinua einführen und erläutern. Wir werden zuerst die Kinematik eines klassischen Makrokontinuums einführen. Diese erweitern wir dann um die Kinematik eines Kontinuums mit Mikrostruktur nach MINDLIN [32]. Nach der Einführung der geometrischen Linearisierung der kinematischen Größen, werden wir anhand des Prinzips der virtuellen Arbeit sowohl die Bilanz- als auch die konstitutiven Gleichungen der Theorie aufstellen. Anschließend müssen wir die Kompatibilitätsbedingungen betrachten, die verifizieren, ob gewisse Felder integrierbar werden. Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir die klassische lineare Elastizität als Spezialfall der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Theorie gewinnen und die Unterschiede beider Theorien diskutieren.

2.1 Kinematik klassischer Kontinua

Ein (kontinuumsmechanischer) **Körper** \mathcal{B} ist definiert als eine strukturlose Menge aus sogenannten **Punkten** \mathcal{X} . Um das Verhalten eines Körpers \mathcal{B} unter Beanspruchung mathematisch besser erfassen zu können, verleihen wir der Menge \mathcal{B} eine Struktur, indem wir die Punkte $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ mit Vektoren des EUKLIDischen Vektorraumes \mathbb{R}^3 identifizieren. Diese Identifikation zwischen dem Punkt $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ und dem **Ortsvektor** $X \in \mathbb{R}^3$ wird durch eine injektive Abbildung, die sogenannte **Konfiguration** κ , beschrieben:

$$\kappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathcal{X} \mapsto X . \quad (2.1)$$

Der Begriff der Konfiguration wird in der Kontinuumsmechanik auch für das Bild $\kappa(\mathcal{B})$ des Körpers \mathcal{B} unter der Abbildung κ verwendet. Es wird vorausgesetzt, dass der Raumbereich $\kappa(\mathcal{B})$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 ist. Allerdings wird jede derartige Abbildung κ Konfiguration genannt, das heißt wir können einem Punkt $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ mehrere Ortsvektoren zuordnen.

Eine besondere Konfiguration κ_R , die keinen tatsächlichen Zustand des Körpers \mathcal{B} beschreiben muss, stellt der Raumbereich der **Referenzkonfiguration** \mathcal{R}_R dar:

$$\mathcal{R}_R := \kappa_R(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3 . \quad (2.2)$$

Wie in der Kontinuumsmechanik üblich bezeichnen wir die Raumpunkte der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R auch als **materielle Punkte** $X \in \mathcal{R}_R$. Unter der **Bewegung** eines Körpers \mathcal{B} verstehen wir nun eine mit der Zeit t parametrisierte Schar $\bar{\kappa}$ von Konfigurationen (Deformationszuständen) des Körpers \mathcal{B} :

$$\bar{\kappa} : \mathcal{B} \times I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\mathcal{X}, t) \mapsto x = \bar{\kappa}(\mathcal{X}, t) . \quad (2.3)$$

Wir sprechen auch davon, dass die Bewegung $\bar{\kappa}$ des Körpers \mathcal{B} zu jedem Zeitpunkt t denjenigen Raumbereich $\bar{\kappa}(\mathcal{B}, t)$ angibt, den der Körper \mathcal{B} zur Zeit t einnimmt. Aus der Schar $\bar{\kappa}$ heben wir besonders die sogenannte **Anfangskonfiguration** \mathcal{R}_0 hervor, die den Raumbereich des \mathbb{R}^3 beschreibt, den der Körper \mathcal{B} zu Beginn einer Bewegung, also zum Zeitpunkt $t = 0$, einnimmt:

$$\mathcal{R}_0 := \bar{\kappa}(\mathcal{B}, 0) \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.4)$$

Sofern nichts anderes angegeben wird, gehen wir davon aus, dass die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R und die soeben eingeführte Anfangskonfiguration \mathcal{R}_0 zusammenfallen, das heißt $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_R$.

Ferner heben wir noch die **Momentankonfiguration** \mathcal{R}_t des Körpers \mathcal{B} zur Zeit t hervor:

$$\mathcal{R}_t := \bar{\kappa}(\mathcal{B}, t) \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

Identifizieren wir in der Schar $\bar{\kappa}$ den Punkt $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$ mit seinem materiellen Punkt X , so nennen wir die daraus resultierende Abbildung **Bewegungsgleichung**:

$$\hat{x} : \mathcal{R}_R \times I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (X, t) \mapsto \mathbf{x} = \hat{x}(X, t) = \bar{\kappa}(\kappa_R^{-1}(X), t). \quad (2.6)$$

Wir setzen voraus, dass die Bewegungsgleichung ein Diffeomorphismus ist und bei festgehaltener Zeit t eine Inverse $\hat{x}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \hat{X}(\mathbf{x}, t)$ besitzt und $\hat{x}(X, t)$ samt $\hat{X}(\mathbf{x}, t)$ genügend oft differenzierbar ist.

Die Bewegungsgleichung auszuwerten wäre aber sehr aufwändig und teilweise sogar unmöglich. Daher führen wir andere Größen mit Hilfe von materiellen Linien ein, um Deformationen zu beschreiben. Eine **materielle Linie** des Körpers \mathcal{B} ist eine in allen Konfigurationen aus den selben materiellen Punkten X bestehende Linie, die mit dem Körper mit deformiert wird. Den Tangentenvektor dieser materiellen Linie im materiellen Punkt X nennen wir ein **materielles Linienelement** dX (siehe Abbildung 2.1) und die Menge aller materiellen Linienelemente im materiellen Punkt X notieren wir durch die Menge $T_X \mathcal{R}_R$. Der Raum $T_{\mathbf{x}} \mathcal{R}_t$ im Punkt \mathbf{x} der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t ist die Menge aller Tangentenvektoren an mitdeformierten materiellen Linien.

Die Deformation des Körpers \mathcal{B} lässt sich durch die Transformation von materiellen Linienelementen beschreiben. Die Transformation eines materiellen Linienelementes dX der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R auf das zugehörige materielle Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t wird durch die Abbildung des **Deformationsgradienten** F beschrieben:

$$F : T_X \mathcal{R}_R \rightarrow T_{\mathbf{x}} \mathcal{R}_t : dX \mapsto d\mathbf{x} = F \cdot dX = (\partial_X \hat{x}) \cdot dX. \quad (2.7)$$

Der Deformationsgradient wird also als Gradient der Bewegungsgleichung für festgehaltene Zeit t gebildet. Es folgt weiter, dass $\det F \neq 0$, da wir die Bewegung als invertierbar annehmen.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} transformiert nicht nur Linienelemente, sondern unter anderem auch das Volumenelement dV der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R auf das entsprechende Volumenelement dv der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t (siehe zum Beispiel HAUPT [21], Theorem 1, S. 28):

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV . \quad (2.8)$$

Diese Transformation hat auch eine wichtige physikalische Implikation. Da Volumina niemals negativ werden können, folgt für die Determinante des Deformationsgradienten \mathbf{F} :

$$(\det \mathbf{F} \neq 0) \wedge (dv, dV > 0) \implies \det \mathbf{F} > 0 . \quad (2.9)$$

Dies begründet die Annahme der Invertierbarkeit der Bewegungsgleichung für festgehaltene Zeit t .

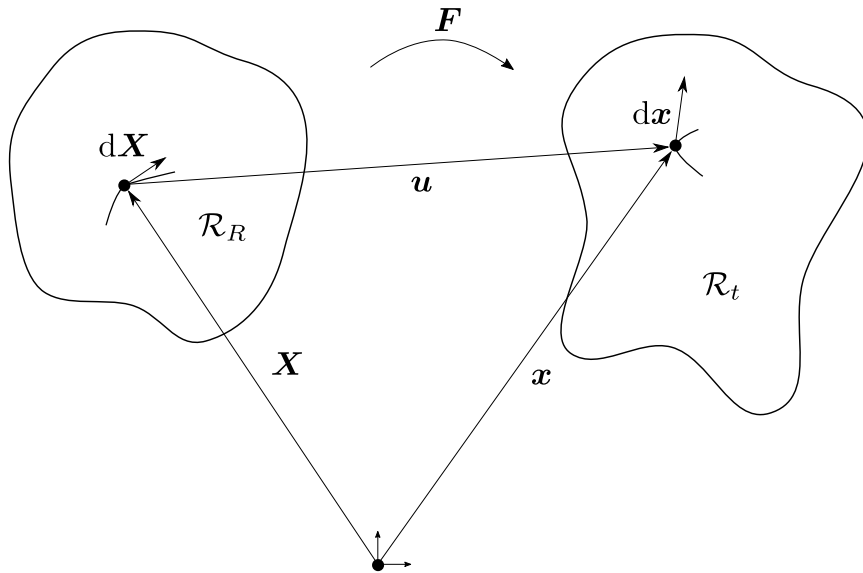


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der Konfigurationen

Bei einer überlagerten Starrkörperbewegung verschwindet der Deformationsgradient \mathbf{F} nicht, denn zum Beispiel bei einer Starrkörperrotation \mathbf{Q} gilt $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$. Starrkörperbewegungen sind vom Standpunkt der Mechanik deformierbarer Körper uninteressant. Daher wird oft die sogenannte **polare Zerlegung** des Deformationsgradienten \mathbf{F} in einen eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und einen symmetrischen, positiv definiten Strecktensor \mathbf{U} oder \mathbf{V} verwendet (siehe BECKER [7]):

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} . \quad (2.10)$$

Diese Zerlegung führt zum Beispiel auf den **rechten CAUCHY-GREEN-Tensor** $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$. Dieser besitzt die Eigenschaft, dass bei einer Starrkörperbewegung $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ gilt.

Eine weitere Möglichkeit zur Erfassung der Deformation ist es, den **Verschiebungsvektor** \mathbf{u} , der in Abbildung 2.1 angedeutet ist, zu verwenden:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (2.11)$$

Weil sowohl die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R als auch die Momentankonfiguration \mathcal{R}_t in den EUKLIDischen Vektorraum \mathbb{R}^3 eingebettet sind, ist diese Differenz wohldefiniert. Gradientenbildung des Verschiebungsvektors \mathbf{u} bezüglich des materiellen Punktes \mathbf{X} führt auf den sogenannten **Verschiebungsgradienten** \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \partial_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \implies \mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1} . \quad (2.12)$$

Sowohl der Deformationsgradient \mathbf{F} als auch der Verschiebungsgradient \mathbf{H} stellen in der Literatur verwendete Beschreibungsweisen für Deformationen von Körpern \mathcal{B} dar. Der Verschiebungsgradient \mathbf{H} verschwindet zwar bei einer Starrkörpertranslation, denn hier gilt $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$, und dieser ist in diesem Sinne besser geeignet als der Deformationsgradient \mathbf{F} . Aber für eine Starrkörperrotation \mathbf{Q} verschwindet auch der Verschiebungsgradient \mathbf{H} nicht, denn in diesem Fall erhalten wir $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \mathbf{Q} - \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$. Eine kinematische Größe zur Beschreibung der Deformation, die jedoch bei allen Starrkörperbewegungen verschwindet, ist der **GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor** \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) . \quad (2.13)$$

2.2 Kinematik mikromorpher Kontinua

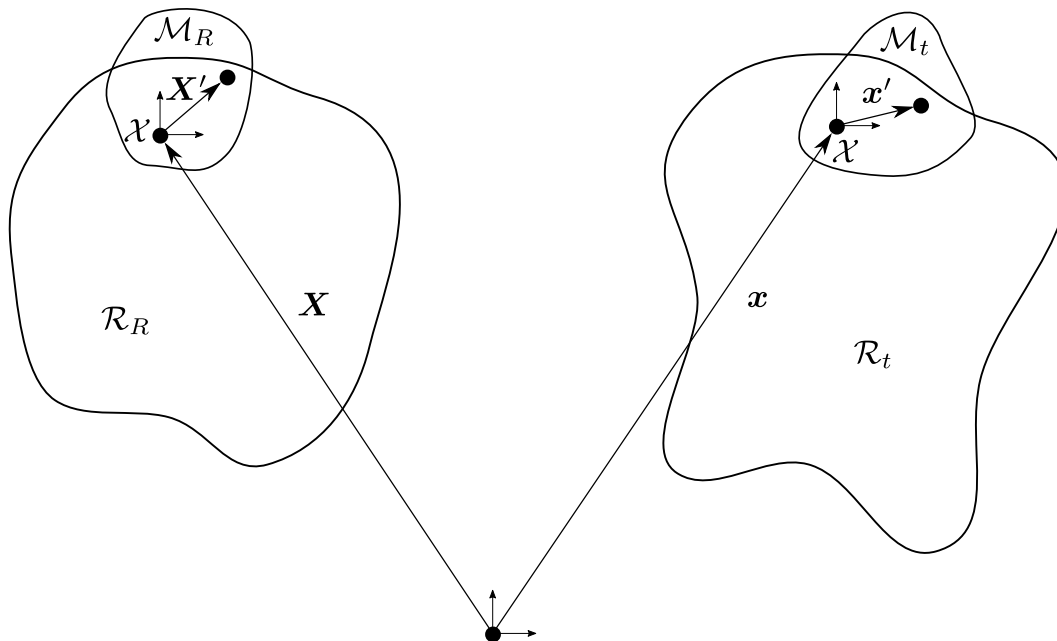


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des Mikrokontinuums

Wir diskutieren im Rahmen dieser Arbeit eine Erweiterung des klassischen Kontinuums, um auch Längenskaleffekte erfassen zu können. Die im vorherigen Kapitel eingeführten Größen beschreiben das sogenannte **Makrokontinuum**, da die Betrachtungsweise auf der makroskopischen Ebene ansetzt. Wir erweitern die Kinematik des klassischen Kontinuums um eine jedem materiellen Punkt \mathbf{X} angeheftete, **Mikrokontinuum** genannte, Substruktur, die ein deformierbarer Körper sein soll. Analog der klassischen Kinematik bezeichnen wir den Raumbereich der Referenzkonfiguration oder Momentankonfiguration, der von diesem Mikrokontinuum am Punkt \mathbf{X} oder \mathbf{x} eingenommen wird, mit $\mathcal{M}_R(\mathbf{X})$ oder $\mathcal{M}_t(\mathbf{x})$. Sowohl das Mikro– als auch das Makrokontinuum wird in den Vektorraum \mathbb{R}^3 eingebettet. Daher können wir analog zu den Ortsvektoren $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_R, \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ die Mikropunkte der Mikrokontinua mit sogenannten Mikroortsvektoren \mathbf{X}', \mathbf{x}' identifizieren und stellen uns vor, dass diese vom jeweiligen Punkt \mathbf{X}, \mathbf{x} des Makrokontinuums ausgehen:

$$\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{x}}'(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) \in \mathcal{M}_t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}' = \hat{\mathbf{X}}'(\mathbf{X}, \mathbf{x}', t) \in \mathcal{M}_R(\mathbf{X}). \quad (2.14)$$

Es wird vorausgesetzt, dass diese Abbildung in allen Argumenten genügend oft stetig differenzierbar ist. Wir lehnen weiter das Verhalten des Mikrokontinuums an das Verhalten des Makrokontinuums an und führen einen **Mikrodeformationsgradienten** \mathbf{f} ein. Das charakteristische Merkmal des mikromorphen Kontinuums ist, dass die Deformation des Mikrokontinuums homogen ist, das heißt nicht von den Ortsvektoren des Mikrokontinuums abhängen: $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$. Daher kann \mathbf{f} als eine Abbildung der Form

$$\mathbf{f} : T_{\mathbf{X}}\mathcal{R}_R \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{R}_t : \mathbf{X}' \mapsto \mathbf{x}' := \mathbf{f} \cdot \mathbf{X}' = (\partial_{\mathbf{X}'} \hat{\mathbf{x}}') \cdot \mathbf{X}' \quad (2.15)$$

angesehen werden. Analog dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} sowie dem Verschiebungsgradienten \mathbf{H} definieren wir auch eine **Mikroverschiebung** \mathbf{u}' sowie einen **Mikroverschiebungsgradienten** \mathbf{h} :

$$\mathbf{u}' := \mathbf{x}' - \mathbf{X}', \quad \mathbf{h} := \partial_{\mathbf{X}'} \mathbf{u}' = \mathbf{f} - \mathbf{1}. \quad (2.16)$$

Der symmetrische beziehungsweise antisymmetrische Anteil des Mikroverschiebungsgradienten \mathbf{h} wird auch als **Mikrodehnung** $\Psi = \mathbf{h}_S$ beziehungsweise **Mikrorotation** $\chi = \mathbf{h}_A$ bezeichnet. Die Kopplung des makro– und mikroskopischen Teils der Theorie wird durch die **relative Deformation** γ genannte Differenz aus dem Makro– und dem Mikroverschiebungsgradienten berücksichtigt:

$$\gamma := \mathbf{H} - \mathbf{h}. \quad (2.17)$$

Diese Differenz einer Größe des Makro– und einer Größe des Mikrokontinuums können wir betrachten, da beide Kontinua (Makro– wie Mikrokontinuum) in ein und denselben Vektorraum \mathbb{R}^3 eingebettet sind.

2.3 Asymptotische Entwicklung der Verzerrungstensoren

In vielen technischen Problemstellungen treten lediglich kleine Deformationen auf. Um die Größe einer (quasi-)statischen Deformation zu charakterisieren, genügt es die folgenden Kenngrößen zu betrachten:

$$\delta_1 := \sup_{X \in \mathcal{R}_R, t \in I} \|\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)\|, \quad (2.18)$$

$$\delta_2 := \sup_{X \in \mathcal{R}_R, X' \in \mathcal{M}_R(X), t \in I} \|\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t)\|, \quad (2.19)$$

$$\delta_3 := \sup_{X \in \mathcal{R}_R, X' \in \mathcal{M}_R(X), t \in I} \|\nabla \mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t)\|. \quad (2.20)$$

Des weiteren definieren wir ein übergeordnetes Maß δ zur Erfassung der Größe der Deformation durch

$$\delta := \max_i \{\delta_i\} = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}. \quad (2.21)$$

Wir sprechen von **kleinen Deformationen**, falls diese Kenngröße sehr klein bleibt, das heißt sofern $\delta \ll 1$. Alle anderen Deformationen bezeichnen wir als groß und untersuchen sie im Rahmen dieser Arbeit nicht näher. Wir geben weiter einige wichtige asymptotische Entwicklungen an und starten mit der asymptotische Entwicklung der Inversen \mathbf{F}^{-1} des Deformationsgradienten \mathbf{F} beziehungsweise der Inversen \mathbf{f}^{-1} des Mikrodeformationsgradienten \mathbf{f} :

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{H} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \mathbf{1} - \mathbf{H}, \quad \mathbf{f}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{h} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \mathbf{1} - \mathbf{h}. \quad (2.22)$$

Eine Folge ist, dass wir nicht zwischen der Gradientenbildung ∂_X bezüglich der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R und der Gradientenbildung ∂_x bezüglich der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t unterscheiden müssen:

$$\partial_x = (\partial_x \mathbf{X}) \cdot \partial_X = \mathbf{F}^{-1} \cdot \partial_X \approx (\mathbf{1} - \mathbf{H}) \cdot \partial_X = \partial_X - \mathbf{H} \cdot \partial_X = \partial_X - \mathcal{O}(\delta) \cdot \partial_X \quad (2.23)$$

Der hintere Term ist in einer Theorie der kleinen Deformationen, das heißt falls $\delta \ll 1$ gilt, von kleinerer Größenordnung und kann somit vernachlässigt werden. Wir erhalten die Approximation

$$\partial_x \approx \partial_X. \quad (2.24)$$

Daher wird in einer Theorie kleiner Deformationen nicht zwischen $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ und $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_R$ unterschieden. Demzufolge werden wir im weiteren materielle Punkte einfach mit \mathbf{x} identifizieren und schreiben einfach \mathcal{R} für die betrachtete Konfiguration.

Die asymptotische Entwicklung des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors \mathbf{E} liefert die **Dehnung** $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{H}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \implies \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\delta^2) \approx \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

2.4 Freie Energiefunktion (pro Volumeneinheit)

Die während einer Deformation im Material gespeicherte Energie wird durch die freie Energie W (pro Volumeneinheit) beschrieben, die mit den genutzten Freiheitsgraden zusammenhängt. In der klassischen Theorie isothermer Prozesse wird davon ausgegangen, dass die freie Energiefunktion W lediglich vom Deformationsgradienten \mathbf{F} abhängt, das heißt $W = \hat{W}(\mathbf{F})$. Diese rein mechanische Theorie wird im Rahmen des mikromorphen Kontinuums durch die Wahl einer freien Energiefunktion \hat{W} erweitert, die sowohl von dem Deformationsgradienten \mathbf{F} des Makrokontinuums als auch vom Mikrodeformationsgradienten \mathbf{f} abhängt (siehe zum Beispiel ERINGEN [11]). Um auch Längenskaleneffekte mit der Materialtheorie abbilden zu können, wird noch eine Abhängigkeit von der Umgebung des materiellen Punktes \mathbf{x} benötigt. Der Gradient $\nabla \mathbf{f}$ des Mikrodeformationsgradienten \mathbf{f} bezüglich des Ortsvektors \mathbf{x} des makroskopischen Kontinuums wird als zusätzliche unabhängige Variable gewählt. Dadurch wird eine interne Länge und mit dieser die Möglichkeit der Erfassung von Längenskaleneffekten gewonnen. Insgesamt wird folgende Form für die freie Energie angesetzt:

$$W = \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}) . \quad (2.26)$$

Diese soll eine freie Energie W (pro Volumeneinheit) des Makrokontinuums beschreiben. Weiter wird gefordert, dass die Materialtheorie dem Prinzip der materiellen Objektivität genügt. Es wird dann auch von einer materiell objektiven Materialtheorie gesprochen: Die freie Energie W muss unabhängig von der Wahl eines Beobachters sein. Für die Abhängigkeiten der freien Energiefunktion \hat{W} bedeutet das, dass bei einer Starrkörperrotation \mathbf{Q} des Beobachters gelten soll:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} , \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f} , \quad (\nabla \mathbf{f})^* = \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{f} . \quad (2.27)$$

Das Prinzip der materiellen Objektivität fordert für die freie Energiefunktion \hat{W} :

$$W \equiv W^* \iff \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}) \equiv \hat{W}(\mathbf{F}^*, \mathbf{f}^*, (\nabla \mathbf{f})^*) = \hat{W}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{f}) . \quad (2.28)$$

Diese Gleichung muss für alle orthogonalen Transformationen \mathbf{Q} gelten, also insbesondere, wenn wir speziell $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ mit der Rotation \mathbf{R} der polaren Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ des Makrodeformationsgradienten \mathbf{F} wählen (siehe auch ERINGEN [11]). Setzen wir diese Wahl der Transformation ein, so gewinnen wir

$$W = \hat{W}(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F}, \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{f}, \mathbf{R}^T \cdot \nabla \mathbf{f}) = \hat{W}(\mathbf{U}, \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{f}, \mathbf{R}^T \cdot \nabla \mathbf{f}) . \quad (2.29)$$

Geschickte Multiplikation mit dem Einheitstensor $\mathbf{1} = \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1}$ in den hinteren Argumenten liefert weiter

$$W = \hat{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{f}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \nabla \mathbf{f}) = \hat{W}(\mathbf{U}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{f}) . \quad (2.30)$$

Wir reinterpretieren, da das erste Argument bereits die Abhängigkeit des Strecktensors \mathbf{U} enthält, und schreiben die freie Energie durch eine neue Funktion \hat{W} um. Auch bei \hat{W} führen wir die asymptotischen Entwicklungen von Abschnitt 2.3 ein und vernachlässigen im Rahmen der Theorie kleiner Deformationen die quadratischen Terme der Argumente:

$$W = \hat{W}(\mathbf{U}, \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{f}, \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \mathbf{f}) \approx \hat{W}(\mathbf{U}, (\mathbf{1} - \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{h}), (\mathbf{1} - \mathbf{H}) \cdot \nabla \mathbf{h}) \quad (2.31)$$

$$\approx \hat{W}(\mathbf{U}, \mathbf{1} - \mathbf{H} + \mathbf{h}, \nabla \mathbf{h}) . \quad (2.32)$$

Da wir eine Theorie kleiner Deformationen betrachten, können wir die Abhängigkeit des Strecktensors \mathbf{U} und des Einheitstensor $\mathbf{1}$ durch eine Abhängigkeit von der Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1})$ ausdrücken. Wir erkennen eine weitere Abhängigkeit von der relativen Deformation $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{H} - \mathbf{h}$ im zweiten Argument. Diese beiden Erkenntnisse motivieren eine spezielle Form der freien Energiefunktion W . Wir folgen BRÖSE ET AL. [8] und machen den speziellen Ansatz

$$W \approx \tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \nabla \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{c_3}{2} \boldsymbol{\gamma} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\gamma} + \frac{c_1 c_3}{2} (\nabla \mathbf{h} : \mathbb{C}) : \nabla \mathbf{h} . \quad (2.33)$$

In diesem Ansatz werden der klassische Elastizitätstensor mit den LAMESchen Konstanten λ_L und μ_L sowie zwei nicht-klassischen Materialparametern c_1 beziehungsweise c_3 verwendet:

$$\mathbb{C} = \lambda_L \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_L \mathbb{1}_S , \quad \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{ijlk} = \mathbb{C}_{jilk} . \quad (2.34)$$

Wir nehmen weiter an, dass der Mikroverschiebungsgradient \mathbf{h} symmetrisch ist:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \equiv \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.35)$$

Wie wir an der Verwendung des klassischen Elastizitätstensors \mathbb{C} im Ansatz (2.33) erkennen, wurden die Materialparameter der freien Energiefunktion \tilde{W} von BRÖSE ET AL. [8] so gewählt, dass lediglich der symmetrische Anteil $\boldsymbol{\gamma}_S$ der relativen Deformation $\boldsymbol{\gamma}$ in die freie Energiefunktion W eingeht. Da die Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}_S$ bereits die Abhängigkeit des symmetrischen Anteils \mathbf{H}_S des Verschiebungsgradienten \mathbf{H} erfasst, reinterpretieren wir die freie Energiefunktion W durch Einsetzen der Beziehung $\boldsymbol{\gamma}_S = \mathbf{H}_S - \boldsymbol{\Psi}$ als:

$$W \approx \bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Psi}, \nabla \boldsymbol{\Psi}) = \frac{1 + c_3}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{c_3}{2} \boldsymbol{\Psi} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\Psi} + \frac{c_1 c_3}{2} (\nabla \boldsymbol{\Psi} : \mathbb{C}) : \nabla \boldsymbol{\Psi} - c_3 \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\Psi} . \quad (2.36)$$

Diese Darstellung der freien Energiefunktion W ist eine unserer primären Arbeitshypothesen und stellt als solche die Grundlage aller weiteren Ausführungen dar. Zusammengefasst gilt: Die Form (2.36) der freien Energie W (pro Volumeneinheit) beschreibt eine nicht-lokale Theorie, da durch die Abhängigkeit vom Makrogradienten $\nabla \boldsymbol{\Psi}$ der Mikrodehnung $\boldsymbol{\Psi}$ auch die Umgebung eines materiellen Punktes \mathbf{x} berücksichtigt wird. Weiter erlaubt der Materialparameter c_1 , wie sich zeigen wird, eine interne Länge zu definieren und ermöglicht es uns somit, Längenskaleneffekte zu erfassen.

2.5 Positive Definitheit der freien Energiefunktion

Um für kleine Deformationen die Stabilität einer belastungsfreien Gleichgewichtslage zu garantieren, muss die freie Energiefunktion (pro Volumeneinheit) positiv definit sein. Diese Forderung diskutieren wir am besten anhand einer Beschreibung der freien Energie W als quadratische Bilinearform der Variablen $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \nabla \boldsymbol{\Psi}$, das heißt anhand von $W = \tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \nabla \boldsymbol{\Psi})$. Für die Stabilität einer belastungsfreien Gleichgewichtslage folgt dann aus Gleichung (2.33) zusammen mit Gleichung (2.34):

$$0 \leq \tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\gamma}, \nabla \boldsymbol{\Psi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : [\lambda_L \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu_L \mathbb{1}_S] : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{c_3}{2} \boldsymbol{\gamma} : [\lambda_L \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu_L \mathbb{1}_S] : \boldsymbol{\gamma} + \frac{c_1 c_3}{2} (\nabla \boldsymbol{\Psi} : [\lambda_L \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu_L \mathbb{1}_S]) : \nabla \boldsymbol{\Psi} . \quad (2.37)$$

Ausführen der auftretenden Multiplikationen führt auf die folgende Ungleichung:

$$0 \leq \frac{\lambda_L}{2} [(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1})^2 + c_3 (\boldsymbol{\gamma} : \mathbf{1})^2 + c_1 c_3 \|\nabla [\boldsymbol{\Psi} : \mathbf{1}]\|^2] + \mu_L [\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + c_3 \|\boldsymbol{\gamma}\|^2 + c_1 c_3 \|\nabla \boldsymbol{\Psi}\|^2] . \quad (2.38)$$

Um eine Schlussfolgerung der Materialparameter zu gewinnen, müssen wir diese Ungleichung derart umgestalten, dass sie eine Linearkombination unabhängiger Größen darstellt. Die Zerlegung eines Tensors \boldsymbol{T} zweiter Stufe in seinen Kugelanteil \boldsymbol{T}^K , der von der Spur abhängt, und den deviatorischen Anteil \boldsymbol{T}^D bietet sich als Darstellung an, da schon einige Terme eine Spur enthalten. Wir gewinnen:

$$0 \leq \frac{3}{2} \lambda_L [\|\boldsymbol{\varepsilon}^K\|^2 + c_3 \|\boldsymbol{\gamma}^K\|^2 + c_1 c_3 \|\nabla \boldsymbol{\Psi}^K\|^2] + \mu_L [\|\boldsymbol{\varepsilon}^D\|^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}^K\|^2 + c_3 \|\boldsymbol{\gamma}^D\|^2 + c_3 \|\boldsymbol{\gamma}^K\|^2 + c_1 c_3 \|\nabla [\boldsymbol{\Psi} : \mathbf{1}]\|^2 + c_1 c_3 \|\nabla \boldsymbol{\Psi}^D\|^2] . \quad (2.39)$$

Umsortieren dieser Ungleichung in die einzelnen unabhängigen Anteile liefert:

$$0 \leq \left(\frac{3}{2} \lambda_L + \mu_L\right) \|\boldsymbol{\varepsilon}^K\|^2 + c_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_L + \mu_L\right) \|\boldsymbol{\gamma}^K\|^2 + c_1 c_3 \left(\frac{3}{2} \lambda_L + \mu_L\right) \|\nabla [\boldsymbol{\Psi} : \mathbf{1}]\|^2 + \mu_L \|\boldsymbol{\varepsilon}^D\|^2 + c_3 \mu_L \|\boldsymbol{\gamma}^D\|^2 + c_1 c_3 \mu_L \|\nabla \boldsymbol{\Psi}^D\|^2 . \quad (2.40)$$

Notwendig und hinreichend für die Erfüllung dieser Ungleichung ist, dass alle Vorfaktoren nicht-negativ sind. Der erste Term liefert eine erste Bedingung und das Betrachten der Vorfaktoren der Deviatoren liefert eine zusätzliche Implikationskette:

$$3 \lambda_L + 2 \mu_L > 0 \quad \wedge \quad (\mu_L > 0 \implies c_3 > 0 \implies c_1 > 0) . \quad (2.41)$$

Diese Ungleichungen stellen einschränkende Bedingungen an die Wahl der Materialparameter und sind bereits in BRÖSE ET AL. [8] angegeben.

2.6 Prinzip der virtuellen Arbeit

Das **Prinzip der virtuellen Arbeit** (PdvA) besagt, dass die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte δW_i und die virtuelle Arbeit der eingepprägten äußeren Kräfte δW_a zueinander gleich sein müssen:

$$0 = \delta W_i - \delta W_a \iff 0 = \delta W_a - \delta W_i. \quad (2.42)$$

Die Erfüllung dieses allgemeinen Prinzips ist für elastische Körper äquivalent zum Erfüllen der Gleichgewichtsbedingungen. Wir setzen voraus, dass die inneren Kräfte ein Potential besitzen: Die freie Energiefunktion \bar{W} . Die Arbeit W_i der inneren Kräfte definieren wir dann durch:

$$W_i(t) := \int_{\mathcal{R}} \bar{W} \, dv \implies \delta W_i = \int_{\mathcal{R}} \delta \bar{W} \, dv. \quad (2.43)$$

Nach geeigneter Wahl der äußeren Kräfte impliziert die Annahme (2.42), dass die Theorie thermodynamisch konsistent sein wird. Thermodynamische Konsistenz bedeutet, dass die Theorie verträglich mit dem angenommenen ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist. Auch wenn stets keinerlei Wärmefluss stattfindet und die Deformationsprozesse stets isotherm sind, wenn also eine rein mechanische Theorie vorliegt, muss sie nicht (automatisch) thermodynamisch konsistent sein. Bekannte Beispiele dafür sind jeweils im Rahmen der konventionellen Formulierung des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik die CAUCHYSche Elastizität und die Hypoelastizität. Dies äußert sich nicht zuletzt dadurch, dass sowohl für CAUCHYSche Elastizität als auch für Hypoelastizität keine freie Energiefunktion existiert. In einem ersten Schritt haben wir bereits in Abschnitt 2.4 a priori die Existenz einer freien Energiefunktion vorausgesetzt. Dann stellt Gleichung (2.42), unabhängig von der speziellen Form von W_a und W_i den ersten Hauptsatz der Thermodynamik in Form von virtuellen Änderungen dar. In einem zweiten Schritt gehen wir nun von einer unbekannten Form der äußeren Kräfte beziehungsweise der entsprechenden Arbeit W_a aus und setzen die freie Energie W in der Form (2.36) als bekannt voraus.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für isotherme Prozesse und Elastizität verlangt, dass die sogenannte Spannungsleistung, unabhängig von ihrer Definition, Arbeit leistet, die vollständig in der freien Energie gespeichert wird. Das bedeutet insbesondere, dass keine Dissipation existiert. Die Spannungsleistung steht in direkter Beziehung zur Form der äußeren Kräfte und zu den zunächst unbekannten Gleichgewichtsbedingungen. Eine bekannte freie Energiefunktion \bar{W} und eine ständige Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik erlauben dann die Form der äußeren Kräfte sowie die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen. Dieses Vorgehen geht im Prinzip auf MINDLIN [32] zurück (vergleiche auch BRÖSE ET AL. [8]), der allerdings den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in seiner Arbeit nicht explizit einbezogen hat. Trotzdem kann sein Vorgehen im Sinne der oben erwähnten Schritte verstanden beziehungsweise interpretiert werden. Dem zweiten Schritt folgend werden wir im Folgenden die Form der äußeren Kräfte und die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.

Als erstes bilden wir die Variation $\delta\bar{W}$. Wir führen für die drei auftretenden partiellen Ableitungen die Abkürzungen Σ , τ und μ ein und erhalten:

$$\delta\bar{W} = \delta\epsilon : (\partial_\epsilon \bar{W}) + \delta\Psi : (\partial_\Psi \bar{W}) + \delta(\nabla\Psi) : (\partial_{\nabla\Psi} \bar{W}) =: \delta\epsilon : \Sigma + \delta\Psi : \tau + \delta(\nabla\Psi) : \mu. \quad (2.44)$$

Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik wird die gesamte Spannungsleistung in der freien Energie gespeichert. Das bedeutet insbesondere, dass die virtuelle Änderung $\delta\bar{W}$ beziehungsweise die Summe der skalaren Produkte $\delta\epsilon : \Sigma + \delta\Psi : \tau + \delta(\nabla\Psi) : \mu$ gleich der Spannungsleistung sein muss. Durch Gleichung (2.44) wird die Spannungsleistung mit den virtuellen Inkrementen $\delta\epsilon$, $\delta\Psi$ und $\delta(\nabla\Psi)$ und den zugehörigen Spannungen Σ , τ und μ in Beziehung gesetzt. Formal ist somit der zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt und es bleibt noch die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen Σ , τ (Tensoren zweiter Stufe) und μ (Tensor dritter Stufe) sowie die erforderlichen Randbedingungen zu bestimmen.

Die noch unbekannten Gleichgewichts- und Randbedingungen müssen auf jeden Fall derart gestaltet sein, dass Gleichung (2.42) niemals verletzt wird. Dies kann folgenderweise gesichert werden. Als erstes drücken wir die Variation $\delta\epsilon = \delta H_S$ durch die Variation $\delta\mathbf{u}$ der klassischen Verschiebung \mathbf{u} aus:

$$\delta\bar{W} = \delta \left[\frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} + [\nabla\mathbf{u}]^T) \right] : \Sigma + \delta\Psi : \tau + \delta(\nabla\Psi) : \mu. \quad (2.45)$$

Ausnutzen der Symmetrie von Σ und Vertauschen der Bildung des Gradienten ∇ und der Variation δ liefert die folgende Darstellung für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte δW_i aus Gleichung (2.42):

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{R}} \delta\bar{W} dv = \int_{\mathcal{R}} \nabla(\delta\mathbf{u}) : \Sigma dv + \int_{\mathcal{R}} \delta\Psi : \tau dv + \int_{\mathcal{R}} \nabla(\delta\Psi) : \mu dv. \quad (2.46)$$

Anwenden der Kettenregel liefert weiter, dass

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot [\Sigma \cdot \delta\mathbf{u}] dv - \int_{\mathcal{R}} \delta\mathbf{u} \cdot [\nabla \cdot \Sigma] dv + \int_{\mathcal{R}} \delta\Psi : \tau dv \\ &\quad + \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot [\mu : \delta\Psi] dv - \int_{\mathcal{R}} \delta\Psi : [\nabla \cdot \mu] dv. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Zwei der Integrale können wir mit Hilfe des GAUSSSchen Integralsatzes transformieren:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} \cdot [\Sigma \cdot \delta\mathbf{u}] da + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{n} \cdot [\mu : \delta\Psi] da \\ &\quad - \int_{\mathcal{R}} \delta\mathbf{u} \cdot [\nabla \cdot \Sigma] dv + \int_{\mathcal{R}} \delta\Psi : [\tau - \nabla \cdot \mu] dv. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die Oberflächenintegrale motivieren die Form der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte δW_a (unter der Annahme verschwindender äußerer Volumenkräfte). Weiter wird die Existenz von klassischen flächenbezogenen Kräften \mathbf{t} und nicht-klassischen flächenbezogenen Doppelkräften $\mathbf{\Lambda}$ angenommen, die jeweils in Verbindung mit den klassischen und den nicht-klassischen Freiheitsgraden \mathbf{u} und Ψ folgende virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte erzeugen:

$$\delta W_a := \int_{\partial \mathcal{R}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, da + \int_{\partial \mathcal{R}} \delta \Psi : \mathbf{\Lambda} \, da . \quad (2.49)$$

Einsetzen der Darstellung (2.48) der virtuellen Arbeit δW_i der inneren Kräfte und der Darstellung (2.49) der virtuellen Arbeit δW_a der äußeren Kräfte in das Prinzip der virtuellen Arbeit (2.42) liefert:

$$\begin{aligned} 0 = \delta W_a - \delta W_i = & \int_{\mathcal{R}} \delta \mathbf{u} \cdot [\nabla \cdot \mathbf{\Sigma}] \, dv + \int_{\mathcal{R}} \delta \Psi : [\nabla \cdot \mathbf{\mu} - \mathbf{\tau}] \, dv \\ & + \int_{\partial \mathcal{R}} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{t} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Sigma}] \, da + \int_{\partial \mathcal{R}} \delta \Psi : [\mathbf{\Lambda} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{\mu}] \, da . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Das Hauptlemma der Variationsrechnung liefert als notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Prinzips der virtuellen Arbeit die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen,

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \mathbf{\Sigma} , \quad \mathbf{0} = \nabla \cdot \mathbf{\mu} - \mathbf{\tau} , \quad (2.51)$$

sowie die Randbedingungen für klassische und nicht-klassische (Doppel-)Kräfte:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Sigma} , \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\mu} . \quad (2.52)$$

Betrachten der Divergenzen in den Gleichgewichtsbedingungen verifiziert, dass wir von der **CAUCHYSCHEN Spannung** $\mathbf{\Sigma}$ sowie einer **Hyperspannung** $\mathbf{\mu}$ sprechen können. Zusätzlich beinhaltet die Gleichgewichtsbedingung der Hyperspannung noch die **relative Spannung** $\mathbf{\tau}$. Diese drei sind nach Gleichung (2.44) zusammen mit der freien Energiefunktion \bar{W} gemäß Gleichung (2.36) wie folgt definiert:

$$\mathbf{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \Psi) = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \bar{W}) = (1 + c_3) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C} , \quad (2.53)$$

$$\mathbf{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}, \Psi) = (\partial_{\Psi} \bar{W}) = c_3 (\Psi - \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbb{C} , \quad (2.54)$$

$$\mathbf{\mu}(\nabla \Psi) = (\partial_{\nabla \Psi} \bar{W}) = c_1 c_3 \nabla \Psi : \mathbb{C} . \quad (2.55)$$

Die Gleichungen (2.51) und (2.52) sind also die Gleichgewichts- und Randbedingungen für das mikromorphe Kontinuum. Der Sonderfall eines symmetrischen Mikroverschiebungsgradienten zusammen mit den Gleichgewichts- und Randbedingungen (2.51) und (2.52) sowie den Materialgleichungen (2.53) bis (2.55) bilden eine spezielle mikromorphe Theorie, die, wie wir in Abschnitt 2.11 zeigen werden, zum IG-Modell (1.2) führen.

2.7 Massenbilanz

Bei der Diskussion der Bilanz der Masse m des Makrokontinuums \mathcal{B} fordern wir, dass im Inneren des Kontinuums keine Masse produziert oder vernichtet wird, und, dass das Kontinuum ein geschlossenes System darstellt, das heißt dass kein Massenfluss über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ stattfindet. Wir gehen, wie in der Kontinuumsmechanik üblich, von einer kontinuierlich verteilten Masse m aus und führen daher allgemein eine Massendichte ϱ_R der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_R und eine entsprechende Massendichte ϱ der Momentankonfiguration \mathcal{R}_t ein. Da wir eine Theorie kleiner Deformationen betrachten, müssen wir nicht zwischen den Konfigurationen unterscheiden und die Massenerhaltung nimmt folgende Form an:

$$\varrho_R = (\det \mathbf{F}) \varrho \implies \varrho_R \approx \varrho . \quad (2.56)$$

2.8 Ebener Verzerrungszustand

Einen „ebenen Verzerrungszustand“ (auch „ebener Dehnungszustand“ genannt) definieren wir zuerst, entgegen der Namensgebung, anhand des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} . Wir wählen für die Betrachtung ein orthonormales Basissystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ derart, dass die Basisrichtung \mathbf{e}_3 fußpunktunabhängig parallel zu einem Normalenvektor einer Ebene gerichtet ist. Dann erzeugt ein Verschiebungsfeld \mathbf{u} einen **ebenen Verzerrungszustand** (EVZ) beziehungsweise einen ebenen Dehnungszustand, falls es nur von den zwei kartesischen Koordinaten x_1 und x_2 abhängt und die Normalenkomponente u_3 verschwindet:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(x_1, x_2, t) \quad \wedge \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (2.57)$$

Die Namensgebung eines ebenen Dehnungszustandes motiviert sich durch die Tatsache, dass wir statt des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} die Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$ betrachten und dass sich aus der Forderung (2.57) an das Verschiebungsfeld \mathbf{u} die folgenden Dehnungen ergeben:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(x_1, x_2, t) \quad \wedge \quad \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} . \quad (2.58)$$

Der ebene Dehnungszustand bedeutet für das Mikrokontinuum analogerweise:

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}(x_1, x_2, t) \quad \wedge \quad \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} . \quad (2.59)$$

2.9 Kompatibilitätsbedingungen

Wir haben bisher diverse Gleichungen diskutiert, die entweder das Materialverhalten beschreiben oder Forderungen an dieses stellen. Würden wir zur Beschreibung des Materialverhaltens ein entsprechend oft stetig differenzierbares Verschiebungsfeld \mathbf{u} nutzen, so würden automatisch alle daraus abgeleiteten Größen wie zum Beispiel der Verschiebungsgradient \mathbf{H} oder der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor \mathbf{E} existieren und ebenfalls entsprechend oft stetig differenzierbar sein. Allerdings verwenden wir, um das Materialverhalten zu beschreiben, nicht das Verschiebungsfeld \mathbf{u} selbst, sondern die Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$. Löst ein Dehnungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}$ das System der Feld- und Materialgleichungen, so bleibt aus mathematischer Sicht noch die Frage, ob dieses Dehnungsfeld $\boldsymbol{\varepsilon}$ zu einem gültigen Verschiebungsfeld \mathbf{u} integrierbar ist. Diese Integrabilität untersuchte ST. VENANT bereits 1860 und führte den **Kompatibilitätstensors** \mathcal{C} im Zuge seiner Diskussion durch folgende Definition ein:

$$\mathcal{C}(\cdot) := \text{curl}(\text{curl}(\cdot)) = \nabla \times [\nabla \times (\cdot)] . \quad (2.60)$$

Die **Kompatibilitätsbedingungen** fordern, dass der Kompatibilitätstensor \mathcal{C} der Lösung $\boldsymbol{\varepsilon}$ verschwindet:

$$0 = \mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \text{curl}(\text{curl}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}] . \quad (2.61)$$

2.10 Spezialfall der linearen Elastizität

Die Kinematik der linearen Elastizität beschreibt einen materiellen Punkt \mathbf{x} , der lediglich klassische Translationsfreiheitsgrade \mathbf{u} besitzt. Wir haben die lineare Elastizität um den Freiheitsgrad Ψ einer (in unserem Fall homogenen) Deformation eines Mikrokontinuums erweitert.

Die Gleichgewichtsbedingungen der linearen Elastizität gelten unverändert mit der symmetrischen CAUCHYSchen Spannung $\boldsymbol{\Sigma} = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \bar{W})$. In der linearen Elastizität impliziert die zweite Bilanzgleichung, die Drehimpulsbilanz, dass der CAUCHYSche Spannungstensor $\boldsymbol{\Sigma}$ symmetrisch sein muss. Die in dieser Arbeit vorgestellte Materialtheorie fordert eine zusätzliche Feldgleichung: Die Gleichgewichtsbedingung der Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$. Durch die Abhängigkeit dieser Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ vom Makrogradienten $\nabla \Psi$ der Mikrodehnung Ψ gewinnen wir einen Einfluss der Umgebung des materiellen Punktes \mathbf{x} auf dessen Deformation. Somit erweitern wir die lineare Elastizität auch um die Möglichkeit, Längenskaleneffekte zu erfassen. Diese sind auf natürliche Weise durch den Materialparameter c_1 , der die Einheit einer Länge zum Quadrat besitzt, in das Modell integriert.

Die Theorie der linearen Elastizität ist weiter als Spezialfall des hier vorgestellten Modells enthalten. Für den Grenzfall $c_3 \rightarrow 0$ gewinnen wir die Gleichungen und Spannungen der linearen Elastizität.

2.11 Folgerung des Modells: IG-Modell und HELMHOLTZ-Gleichung

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Materialtheorie hat eine interessante Folgerung. Betrachten wir die Summe aus der relativen Spannung τ und der CAUCHYSchen Spannung Σ , so ergibt sich:

$$\tau + \Sigma \stackrel{(2.53)}{\stackrel{(2.54)}{=}} [c_3 (\Psi - \varepsilon) : \mathbb{C}] + [(1 + c_3) \varepsilon : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C}] = \varepsilon : \mathbb{C} \implies \tau = \varepsilon : \mathbb{C} - \Sigma. \quad (2.62)$$

Die Gleichgewichtsbedingung $(2.51)_2$ der Hyperspannung μ liefert in Kombination mit der Definition der Hyperspannung μ und dem LAPLACE-Operator Δ angewandt auf die CAUCHYSche Spannung Σ :

$$\tau \stackrel{(2.51)_2}{=} \nabla \cdot \mu \stackrel{(2.55)}{=} c_1 c_3 \Delta \Psi : \mathbb{C} \stackrel{(2.53)}{=} c_1 (1 + c_3) \Delta \varepsilon : \mathbb{C} - c_1 \Delta \Sigma. \quad (2.63)$$

Ein Vergleich der Gln. (2.62) und (2.63) liefert das **IG-Modell**:

$$\Sigma - c_1 \Delta \Sigma = \varepsilon : \mathbb{C} - c_2 \Delta \varepsilon : \mathbb{C}, \quad c_2 := c_1 (1 + c_3) > c_1 > 0. \quad (2.64)$$

Dieses Modell wurde, wie bereits erwähnt, von GUTKIN & AIFANTIS [20] eingeführt, um die Spannungen an Rissspitzen zu regularisieren. Wir werden in Kapitel 3 zeigen, dass diese Behauptung falsch ist, das heißt dass alle Spannungen weiterhin singulär bleiben.

Das IG-Modell (2.64) weist lediglich eine implizite Abhängigkeit von der erweiterten Kinematik des mikromorphen Kontinuums auf. Um eine explizite Abhängigkeit zu erhalten, betrachten wir die Inversion des Materialgesetzes (2.53) der CAUCHYSchen Spannung Σ :

$$\Sigma \stackrel{(2.53)}{=} (1 + c_3) \varepsilon : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C} \implies \varepsilon = \frac{1}{1 + c_3} \Sigma : \mathbb{C}^{-1} + \frac{c_3}{1 + c_3} \Psi. \quad (2.65)$$

Setzen wir diese Beziehung in das IG-Modell (2.64) ein und fassen zusammen, so erhalten wir eine äquivalente **HELMHOLTZ-Gleichung** mit einer expliziten Abhängigkeit von der Mikrodehnung Ψ :

$$\mathbf{0} = \Psi - c_2 \Delta \Psi - \Sigma : \mathbb{C}^{-1}, \quad c_2 = c_1 (1 + c_3) > c_1 > 0, \quad (2.66)$$

Als Letztes geben wir noch eine Beziehung der Dehnung ε zur nicht-klassischen Mikrodehnung Ψ an:

$$c_1 c_3 \Delta \Psi : \mathbb{C} \stackrel{(2.63)_2}{=} \tau \stackrel{(2.54)}{=} c_3 (\Psi - \varepsilon) : \mathbb{C} \implies \varepsilon = \Psi - c_1 \Delta \Psi. \quad (2.67)$$

2.12 Zusammenfassung der Theorie

Zum Abschluss dieses Kapitels fassen wir noch einmal alle wichtigen Gleichungen zusammen.

1. Kinematik:

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad \Psi := \frac{1}{2} [(\partial_{X'} \mathbf{u}') + (\partial_{X'} \mathbf{u}')^T] \equiv (\partial_{X'} \mathbf{u}'), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \Psi - c_1 \Delta \Psi. \quad (2.68)$$

2. Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{0} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\tau}. \quad (2.69)$$

3. Krastrandbedingungen:

$$\mathbf{t} := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\Lambda} := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (2.70)$$

4. Materialgesetze:

$$\boldsymbol{\Sigma} := (1 + c_3) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{\tau} := c_3 (\Psi - \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{\mu} := c_1 c_3 \nabla \Psi : \mathbb{C}. \quad (2.71)$$

5. Kompatibilitätsbedingungen:

$$\mathbf{0} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2.72)$$

6. HELMHOLTZ-Gleichung beziehungsweise IG-Modell:

$$\mathbf{0} = \Psi - c_2 \Delta \Psi - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{C}^{-1} \iff \boldsymbol{\Sigma} - c_1 \Delta \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} - c_2 \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}. \quad (2.73)$$

7. thermodynamische Forderungen an Materialparameter:

$$c_2 := c_1 (1 + c_3) > c_1 > 0, \quad c_3 > 0, \quad \mu_L > 0, \quad 2\mu_L + 3\lambda_L > 0. \quad (2.74)$$

Tabelle 2.1.: Gleichungen des Modells für einen ebenen Verzerrungszustand

3 Analytische Diskussion von Rissspitzenfeldern

Wir haben die theoretischen Grundlagen des Modells in Kapitel 2 diskutiert. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die Rissspitzenfelder für das IG-Modell (2.73) zu untersuchen. In diesem Kapitel betrachten wir einen scharfen Riss in einem zweidimensionalen unendlichen Medium. Um eine Aussage über die Regularität der Felder treffen zu können, geben wir zuerst alle zu lösenden Gleichungen aus Tabelle 2.1 und die zugehörigen Randbedingungen in Komponentendarstellung an. Diese Gleichungen werden wir dann mit Hilfe eines asymptotischen Ansatzes gemäß WILLIAMS [41] untersuchen. Wie wir zeigen werden, ergeben sich für die CAUCHYSche Spannung Σ dieselben Differentialgleichungen wie in der klassischen linearen Bruchmechanik. Die Lösung ist also weiterhin singulär im Gegensatz zur in der Literatur verbreiteten Hypothese, dass das IG-Modell die Spannungen regularisieren könne.

3.1 Grundgleichungen in Polarkoordinaten

Wir untersuchen ein zweidimensionales unendliches Medium mit einem scharfen horizontalen Riss unter der Annahme eines ebenen Dehnungszustandes. Für derartige Rissspitzenanalysen bieten sich Zylinderkoordinaten (r, φ, z) an, deren r -Koordinatenlinien radiale Strahlen ausgehend von der Rissspitze und deren φ -Koordinatenlinien konzentrische Kreise um die Rissspitze sind. Um jegliche Längenänderung in der Komponentendarstellung zu berücksichtigen, ist es zweckmäßig physikalische Komponenten zu verwenden.

Wir geben in diesem Abschnitt die entsprechenden Komponentendarstellungen der Gleichungen des ebenen Dehnungszustandes aus Tabelle 2.1 in physikalischen Komponenten an. Bereits in Abschnitt 2.11 wurde festgestellt, dass aus den Gleichgewichtsbedingungen eine Differentialgleichung der Form (2.73) folgt. Das bedeutet, wir können anstatt der Gleichgewichtsbedingung (2.69)₂ der Hyperspannung μ die HELMHOLTZ-Gleichung (2.73)₂ betrachten.

Weiter erkennen wir, dass die Gleichgewichtsbedingungen in der CAUCHYSchen Spannung Σ sowie der Mikrodehnung Ψ formuliert sind. Die Kompatibilitätsbedingungen hingegen betrachten die Dehnung ε . Um auch die Kompatibilitätsbedingungen in der CAUCHYSchen Spannung Σ und der Mikrodehnung Ψ zu formulieren, invertieren wir das Materialgesetz (2.71)₁ der CAUCHYSchen Spannung Σ :

$$c_2 = c_1 (1 + c_3) \quad \wedge \quad \Sigma = (1 + c_3) \varepsilon : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C} \quad \implies \quad \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} \Sigma : \mathbb{C}^{-1} + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi. \quad (3.1)$$

Die spezielle Form dieser Gleichung legt eine Interpretation der hier auftretenden Mikrodehnung Ψ als Eigendehnung nahe. Allerdings stellen Eigendehnungen, im Gegensatz zur Mikrodehnung Ψ , keine unabhängigen Freiheitsgrade dar und besitzen somit einen anderen physikalischen Charakter.

Das in Tabelle 2.1 zusammengefasste Modell besitzt bezüglich eines durch das Basissystem $\{\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\varphi, \mathbf{g}_z\}$ der Zylinderkoordinaten (r, φ, z) induzierten physikalischen Basissystemes $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ die in folgender Tabelle zusammengefassten Komponentendarstellungen.

1. Gleichgewichtsbedingungen:

$$0 = (\partial_{rr} \Sigma_{rr}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \Sigma_{r\varphi}) + \frac{1}{r} (\Sigma_{rr} - \Sigma_{\varphi\varphi}) , \quad (3.2)$$

$$0 = (\partial_r \Sigma_{r\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \Sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{2}{r} \Sigma_{r\varphi} . \quad (3.3)$$

2. HELMHOLTZ-Gleichung:

$$0 = (\partial_{rr} \Psi_{rr}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}) + \frac{1}{r} (\partial_r \Psi_{rr}) - \frac{4}{r^2} (\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}) - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{c_2} \right) \Psi_{rr} + \frac{2}{r^2} \Psi_{\varphi\varphi} + \frac{1-\nu}{2\mu_L c_2} \Sigma_{rr} - \frac{\nu}{2\mu_L c_2} \Sigma_{\varphi\varphi} , \quad (3.4)$$

$$0 = (\partial_{rr} \Psi_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) + \frac{4}{r^2} (\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}) + \frac{2}{r^2} \Psi_{rr} - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{1}{c_2} \right) \Psi_{\varphi\varphi} + \frac{1-\nu}{2\mu_L c_2} \Sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu}{2\mu_L c_2} \Sigma_{rr} , \quad (3.5)$$

$$0 = (\partial_{rr} \Psi_{r\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_r \Psi_{r\varphi}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi \Psi_{rr}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) - \left(\frac{4}{r^2} + \frac{1}{c_2} \right) \Psi_{r\varphi} + \frac{1}{2\mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi} . \quad (3.6)$$

3. Kompatibilitätsbedingung:

$$0 = (\partial_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \varepsilon_{rr}) - \frac{2}{r} (\partial_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}) - \frac{1}{r} (\partial_r \varepsilon_{rr}) + \frac{2}{r} (\partial_r \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi \varepsilon_{r\varphi}) . \quad (3.7)$$

4. Invertiertes Materialgesetz der CAUCHYSchen Spannungen:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{c_1}{2\mu_L c_2} [\Sigma_{rr} - \nu(\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi})] + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{rr} , \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{c_1}{2\mu_L c_2} [\Sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi})] + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{\varphi\varphi} , \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{c_1}{2\mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi} + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{r\varphi} . \quad (3.10)$$

Tabelle 3.1.: Modell (EVZ) in physikalischen Komponenten bezüglich Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

3.2 Randbedingungen

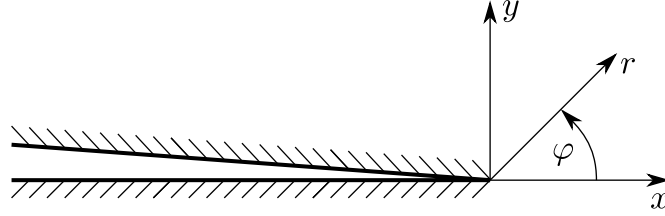


Abbildung 3.1.: Koordinatensystem des Rissspitzenproblems

Wir betrachten einen scharfen Riss wie er in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Beide Rissflanken sollen als kraft- und doppelkraftfrei vorausgesetzt werden:

$$\mathbf{0} = \mathbf{t}(r, \varphi = \pm\pi), \quad \mathbf{0} = \mathbf{\Lambda}(r, \varphi = \pm\pi). \quad (3.11)$$

Der Normalenvektor der Rissflanken zeigt in rein vertikaler Richtung:

$$\mathbf{n}(r, \varphi = \pm\pi) = n_i \mathbf{e}_i \equiv n_\varphi \mathbf{e}_\varphi = \mp \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.12)$$

Der Übersichtlichkeit halber geben wir nur noch die Abhängigkeit vom Winkel φ an, da kein Einfluss des Radius r auf die Randbedingungen existiert. Daraus ergeben sich folgende Spannungsrandbedingungen:

$$0 = t_r(\varphi = \pm\pi) = (n_i \Sigma_{ir})(\varphi = \pm\pi) \stackrel{(3.12)}{=} \mp \Sigma_{\varphi r}(\varphi = \pm\pi) = \mp \Sigma_{r\varphi}(\varphi = \pm\pi), \quad (3.13)$$

$$0 = t_\varphi(\varphi = \pm\pi) = (n_i \Sigma_{i\varphi})(\varphi = \pm\pi) \stackrel{(3.12)}{=} \mp \Sigma_{\varphi\varphi}(\varphi = \pm\pi), \quad (3.14)$$

$$0 = t_z(\varphi = \pm\pi) = (n_i \Sigma_{iz})(\varphi = \pm\pi) \stackrel{(3.12)}{=} \mp \Sigma_{\varphi z}(\varphi = \pm\pi). \quad (3.15)$$

Die Hyperspannungsrandbedingungen liefern keine direkte Forderung an eine einzelne Komponente der Mikrodehnung Ψ . Unter Verwendung der Definition des Doppelkrafttensors $\mathbf{\Lambda}$ sowie anschließend Einsetzen der Definition der Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 = \Lambda_{ij}(\varphi = \pm\pi) &\stackrel{(2.52)_2}{=} (n_k \mu_{kij})(\varphi = \pm\pi) \\ &\stackrel{(2.55)}{=} (c_1 c_3 n_k (\nabla \Psi)_{kmn} \mathbb{C}_{mnij})(\varphi = \pm\pi) \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \mp c_1 c_3 (\nabla \Psi)_{\varphi mn}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{mnij}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Beide Materialparameter c_1 und c_3 sind positiv. Wir können also durch sie dividieren und sie spielen für die Randbedingungen keine Rolle. Unter Berücksichtigung der Komponenten des Elastizitätstensors \mathbb{C} liefert die Betrachtung der Diagonalkomponenten Λ_{rr} , $\Lambda_{\varphi\varphi}$ sowie Λ_{zz} die drei Randbedingungen:

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi rr}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{rrrr} + (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{\varphi\varphi rr} + (\nabla\Psi)_{\varphi zz}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{zzrr} , \quad (3.17)$$

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi rr}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{rr\varphi\varphi} + (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + (\nabla\Psi)_{\varphi zz}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{zz\varphi\varphi} , \quad (3.18)$$

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi rr}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{rrzz} + (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{\varphi\varphi zz} + (\nabla\Psi)_{\varphi zz}(\varphi = \pm\pi) \mathbb{C}_{zzzz} . \quad (3.19)$$

Berücksichtigen wir die besondere Struktur des Elastizitätstensors, so erkennen wir, dass dieser nur drei verschiedene Komponenten besitzt. Diese sind entweder von der Form $C_1 := \mathbb{C}_{(iiii)} = \lambda_L + 2\mu_L$ oder für $i \neq j$ von der Form $C_2 := \mathbb{C}_{(iijj)} = \lambda_L$ bzw. $C_3 := \mathbb{C}_{(ijij)} = \mu_L$. Dann lassen sich die drei Randbedingungen (3.17)–(3.19) als lineares Gleichungssystem schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 \\ C_2 & C_1 & C_2 \\ C_2 & C_2 & C_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\nabla\Psi)_{\varphi rr} \\ (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi\varphi} \\ (\nabla\Psi)_{\varphi zz} \end{pmatrix} . \quad (3.20)$$

Betrachten der Determinante dieses homogenen Gleichungssystems liefert, dass

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_2 \\ C_2 & C_1 & C_2 \\ C_2 & C_2 & C_1 \end{vmatrix} = (C_1)^3 + 2(C_2)^3 - 3C_1(C_2)^2 = 12\lambda_L^2\mu_L \neq 0 . \quad (3.21)$$

Somit besitzt dieses nur die triviale Lösung und wir gewinnen die drei Randbedingungen

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi rr}(\varphi = \pm\pi) = \frac{1}{r} \left[(\partial_\varphi \Psi_{rr}) - 2\Psi_{r\varphi} \right] (\varphi = \pm\pi) , \quad (3.22)$$

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi\varphi}(\varphi = \pm\pi) = \frac{1}{r} \left[(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) + 2\Psi_{r\varphi} \right] (\varphi = \pm\pi) , \quad (3.23)$$

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi zz}(\varphi = \pm\pi) = \frac{1}{r} (\partial_\varphi \Psi_{zz}) (\varphi = \pm\pi) . \quad (3.24)$$

Als Letztes diskutieren wir noch die Randbedingungen der Nebendiagonalkomponenten $\Lambda_{r\varphi}$, Λ_{rz} sowie $\Lambda_{\varphi z}$. Betrachten von Gleichung (3.16), mit $i \neq j$, führt zu den drei Bedingungen

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi r\varphi}(\varphi = \pm\pi) = (\nabla\Psi)_{\varphi rz}(\varphi = \pm\pi) = (\nabla\Psi)_{\varphi\varphi z}(\varphi = \pm\pi) . \quad (3.25)$$

Die Annahme eines ebenen Mikrodehnungszustandes vereinfacht diese Randbedingung zu

$$0 = (\nabla\Psi)_{\varphi r\varphi}(\varphi = \pm\pi) = \frac{1}{r} \left[(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}) + \Psi_{rr} - \Psi_{\varphi\varphi} \right] (\varphi = \pm\pi) . \quad (3.26)$$

3.3 Symmetriebedingungen

Wir haben für die insgesamt sechs Gleichungen (3.2) bis (3.7) in der CAUCHYSchen Spannung Σ sowie der Mikrodehnung Ψ fünf Randbedingungen (3.13), (3.14), (3.22), (3.23) und (3.24) gefordert. Es fällt auf, dass zur geschlossenen Lösung des Gleichungssystems nicht genügend Randbedingungen zur Verfügung stehen. Die fehlenden Bedingungen werden wir aus dem Symmetrieverhalten der Verschiebung u und der Mikrodehnung Ψ .

Modus I

Wir beginnen mit den Symmetriebedingungen für **Modus I**, also einem Riss unter Zugbeanspruchung senkrecht zur Rissausbreitungsrichtung. Für die Verschiebungen u_i fordern wir

$$u_r(r, \varphi) = u_r(r, -\varphi) , \quad u_\varphi(r, \varphi) = -u_\varphi(r, -\varphi) . \quad (3.27)$$

Für die Mikrodehnungen Ψ_{ij} fordern wir hingegen die Symmetriebedingungen

$$\Psi_{rr}(r, \varphi) = \Psi_{rr}(r, -\varphi) , \quad \Psi_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = \Psi_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \Psi_{r\varphi}(r, \varphi) = -\Psi_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.28)$$

Berücksichtigen wir diese Symmetrien, so ergibt sich aus Gleichung (2.68)₃ für die Dehnungen ε_{ij} sowie darauf aufbauend aus Gleichung (2.71)₁ für die CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} das Symmetrieverhalten

$$\varepsilon_{rr}(r, \varphi) = \varepsilon_{rr}(r, -\varphi) , \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = \varepsilon_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \varepsilon_{r\varphi}(r, \varphi) = -\varepsilon_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.29)$$

$$\Sigma_{rr}(r, \varphi) = \Sigma_{rr}(r, -\varphi) , \quad \Sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = \Sigma_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \Sigma_{r\varphi}(r, \varphi) = -\Sigma_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.30)$$

Modus II

Die Symmetriebedingungen für **Modus II**, also einem Riss unter Schubbeanspruchung, sind sowohl für die Verschiebungen u_i als auch für die Mikrodehnungen Ψ_{ij} „invers“ zu den Symmetrien des Modus I:

$$u_r(r, \varphi) = -u_r(r, -\varphi) , \quad u_\varphi(r, \varphi) = u_\varphi(r, -\varphi) . \quad (3.31)$$

$$\Psi_{rr}(r, \varphi) = -\Psi_{rr}(r, -\varphi) , \quad \Psi_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = -\Psi_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \Psi_{r\varphi}(r, \varphi) = \Psi_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.32)$$

Die entsprechenden Symmetrien der Dehnungen ε_{ij} sowie der Spannungen Σ_{ij} lauten:

$$\varepsilon_{rr}(r, \varphi) = -\varepsilon_{rr}(r, -\varphi) , \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = -\varepsilon_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \varepsilon_{r\varphi}(r, \varphi) = \varepsilon_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.33)$$

$$\Sigma_{rr}(r, \varphi) = -\Sigma_{rr}(r, -\varphi) , \quad \Sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = -\Sigma_{\varphi\varphi}(r, -\varphi) , \quad \Sigma_{r\varphi}(r, \varphi) = \Sigma_{r\varphi}(r, -\varphi) . \quad (3.34)$$

3.4 Potenzreihenansatz nach Williams

Zum Lösen des Gleichungssystems aus Kapitel 3.1 mit den in Kapitel 3.2 formulierten Rand- und Symmetriebedingungen zerlegen wir die beiden Lösungsfelder Ψ und Σ in eine Potenzreihe bezüglich des Radius r und einem vom Winkel φ abhängigen Faktor, den **Winkelfunktionen**. In Verallgemeinerung des Vorschlags von WILLIAMS [41] wählen wir einen asymptotischen Ansatz für die Verschiebungen u_i und die Mikrodehnungen Ψ_{ij} . Zusätzlich fordern wir, dass die Risspitze fixiert modelliert werden kann, das heißt, dass für die Risspitze alle Verschiebungen verschwinden. Gradienten der Verschiebungen können weiterhin auch an der Risspitze auftreten. Daher müssen wir dem Ansatz der Mikrodehnung Ψ einen weiteren konstanten Term $\bar{\Psi}$ hinzufügen, dessen Komponenten bezüglich eines Zylinderkoordinatensystems allerdings eine Winkelabhängigkeit aufweisen können. Die CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} und die Mikrodehnungen Ψ_{ij} besitzen die folgenden asymptotischen Ansätze:

$$\Sigma_{ij}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \Sigma_{ij}^{(k)}(\varphi), \quad [\Psi_{ij} - \bar{\Psi}_{ij}](r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} \Psi_{ij}^{(k)}(\varphi). \quad (3.35)$$

Da der Gradient $\nabla \bar{\Psi}$ verschwindet, verschwinden insbesondere auch die Komponenten $(\nabla \bar{\Psi})_{ijk}$ sowie die entsprechenden LAPLACE-Ableitungen $(\Delta \bar{\Psi})_{ij}$ bezüglich eines Zylinderkoordinatensystems. Um den konstanten Term $\bar{\Psi}$ bezüglich eines Zylinderkoordinatensystems darzustellen, müssen wir die konstanten kartesischen Komponenten transformieren. Wir erhalten somit die physikalischen Komponenten

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{rr} \\ \bar{\Psi}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\Psi}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{xx} + \bar{\Psi}_{yy} \\ \bar{\Psi}_{xx} - \bar{\Psi}_{yy} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (\bar{\Psi}_{xx} - \bar{\Psi}_{yy}) \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) \\ -\cos(2\varphi) \\ -\sin(2\varphi) \end{bmatrix} + \bar{\Psi}_{xy} \begin{bmatrix} \sin(2\varphi) \\ -\sin(2\varphi) \\ +\cos(2\varphi) \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Weiter treten in Gleichung (3.35) noch die Winkelfunktionen k -ter Ordnung $\Sigma_{ij}^{(k)}$ sowie $\Psi_{ij}^{(k)}$ auf. Der Parameter p wird auch als **Spannungsexponent** bezeichnet, da dieser die Singularitätsordnung des asymptotischen Ansatzes bestimmt.

Die ersten partiellen Ableitungen der CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} und Mikrodehnungen Ψ_{ij} lauten:

$$(\partial_r \Sigma_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[p + \frac{k}{2} - 1 \right] \Sigma_{ij}^{(k)}(\varphi), \quad (3.37)$$

$$(\partial_\varphi \Sigma_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} (\partial_\varphi \Sigma_{ij}^{(k)})(\varphi), \quad (3.38)$$

$$(\partial_r \Psi_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \left[p + \frac{k}{2} \right] \Psi_{ij}^{(k)}(\varphi), \quad (3.39)$$

$$(\partial_\varphi \Psi_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} (\partial_\varphi \Psi_{ij}^{(k)})(\varphi), \quad (3.40)$$

In dem in Tabelle 3.1 zusammengefassten Gleichungssystem treten zusätzlich die folgenden zweiten partiellen Ableitungen der Mikrodehnungen Ψ_{ij} auf:

$$(\partial_{rr}\Psi_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[p + \frac{k}{2} \right] \left[p + \frac{k}{2} - 1 \right] \Psi_{ij}^{(k)}(\varphi) , \quad (3.41)$$

$$(\partial_{r\varphi}\Psi_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \left[p + \frac{k}{2} \right] (\partial_{\varphi}\Psi_{ij}^{(k)})(\varphi) , \quad (3.42)$$

$$(\partial_{\varphi\varphi}\Psi_{ij})(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} (\partial_{\varphi\varphi}\Psi_{ij}^{(k)})(\varphi) . \quad (3.43)$$

3.4.1 Gleichgewichtsbedingungen

Der Übersichtlichkeit halber verzichten wir im Folgenden auf die Angabe der Abhängigkeiten bei den Winkelfunktionen. Setzen wir die asymptotischen Ansätze in Gleichgewichtsbedingung (3.2) ein und sortieren nach den Potenzen des Radius r , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[p + \frac{k}{2} - 1 \right] \Sigma_{rr}^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} (\partial_{\varphi}\Sigma_{r\varphi}^{(k)}) + \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} [\Sigma_{rr}^{(k)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[(\partial_{\varphi}\Sigma_{r\varphi}^{(k)}) + \left(p + \frac{k}{2} \right) \Sigma_{rr}^{(k)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der Potenzen des Radius r gewinnen wir eine Folge von Differentialgleichungen mit dem Parameter $k \in \mathbb{N}_0$:

$$0 = (\partial_{\varphi}\Sigma_{r\varphi}^{(k)}) + \left(p + \frac{k}{2} \right) \Sigma_{rr}^{(k)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} . \quad (3.45)$$

Analoges Vorgehen für Gleichgewichtsbedingung (3.3) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left(p + \frac{k}{2} - 1 \right) \Sigma_{r\varphi}^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} (\partial_{\varphi}\Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \Sigma_{r\varphi}^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[(\partial_{\varphi}\Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}) + \left(p + \frac{k}{2} + 1 \right) \Sigma_{r\varphi}^{(k)} \right] . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Auch in diesem Fall erhalten wir eine Folge von Differentialgleichungen mit dem Parameter $k \in \mathbb{N}_0$:

$$0 = (\partial_{\varphi}\Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}) + \left(p + \frac{k}{2} + 1 \right) \Sigma_{r\varphi}^{(k)} . \quad (3.47)$$

Es ist auffällig, dass beide Folgen von den Materialparametern des Modells unabhängig sind.

3.4.2 HELMHOLTZ–Gleichung

Die Auswirkungen der asymptotischen Ansätze auf die drei Differentialgleichungen (3.4)–(3.6) diskutieren wir als Nächstes. Wir beginnen mit der Differentialgleichung (3.4), setzen die asymptotischen Ansätze ein und sortieren anschließend nach den Potenzen des Radius r :

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[\left(p + \frac{k}{2} \right) \left(p + \frac{k}{2} - 1 \right) \Psi_{rr}^{(k)} + \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(k)} \right) + \left(p + \frac{k}{2} \right) \Psi_{rr}^{(k)} - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) \right. \\
 & \left. - 2 \Psi_{rr}^{(k)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] - \frac{1}{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} \Psi_{rr}^{(k)} \\
 & + \frac{1}{2\mu_L c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \left[(1-\nu) \Sigma_{rr}^{(k)} - \nu \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \right].
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Zusammenfassen und Sortieren nach den auftretenden Ableitungsordnungen liefert:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[\left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(k)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) + \left[\left(p + \frac{k}{2} \right)^2 - 2 \right] \Psi_{rr}^{(k)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] \\
 & + \frac{1}{2\mu_L c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \left[(1-\nu) \Sigma_{rr}^{(k)} - \nu \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] - \frac{1}{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} \Psi_{rr}^{(k)}.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Die Koeffizientenvergleiche der ersten Potenzen $p-2$ und $p-\frac{3}{2}$ ergeben Differentialgleichungen, die allein in den Winkelfunktionen der Mikrodehnung Ψ formuliert sind:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + [p^2 - 2] \Psi_{rr}^{(0)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}, \tag{3.50}$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(1)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \Psi_{rr}^{(1)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}. \tag{3.51}$$

Diese Differentialgleichungen sind wie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen unabhängig von allen Materialparametern. Erst wenn wir den Koeffizientenvergleich der Potenz $p-1$ betrachten, erkennen wir eine Kopplung der Winkelfunktionen und somit einen Einfluss der Materialparameter:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(2)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 2] \Psi_{rr}^{(2)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{(1-\nu) \Sigma_{rr}^{(0)} - \nu \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}}{2\mu_L c_2}. \tag{3.52}$$

Ein Vergleich der Differentialgleichungen (3.4) und (3.5) zeigt, dass beide Differentialgleichungen einen identischen Aufbau besitzen. Wir müssen lediglich in den beiden Differentialgleichungen die Mikrodehnungswinkelfunktionen $\Psi_{rr}^{(k)}$ und $\Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}$ sowie die Spannungswinkelfunktionen $\Sigma_{rr}^{(k)}$ und $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}$ jeweils miteinander vertauschen.

Per Analogieschluss erhalten wir also folgende Differentialgleichungen:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + [p^2 - 2] \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} + 2 \Psi_{rr}^{(0)}, \quad (3.53)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} + 2 \Psi_{rr}^{(1)}, \quad (3.54)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 2] \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} + 2 \Psi_{rr}^{(2)} + \frac{(1-\nu) \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} - \nu \Sigma_{rr}^{(0)}}{2\mu_L c_2}. \quad (3.55)$$

Als Letztes setzen wir die asymptotischen Ansätze noch in die Differentialgleichung (3.6) ein, die eine leicht andere Struktur als die zwei vorherigen Differentialgleichungen besitzt, und sortieren direkt:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[\left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(k)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) + \left[\left(p + \frac{k}{2} \right)^2 - 4 \right] \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right] \\ & + \frac{1}{2\mu_L c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-1} \Sigma_{r\varphi}^{(k)} - \frac{1}{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}} \Psi_{r\varphi}^{(k)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Der Koeffizientenvergleich dieser Gleichung liefert uns die folgenden Differentialgleichungen:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + (p^2 - 4) \Psi_{r\varphi}^{(0)}, \quad (3.57)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(1)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \right] \Psi_{r\varphi}^{(1)}, \quad (3.58)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(2)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 4] \Psi_{r\varphi}^{(2)} + \frac{1}{2\mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi}^{(0)}. \quad (3.59)$$

3.4.3 Kompatibilitätsbedingung

Abschließend diskutieren wir, welche Auswirkungen die asymptotischen Ansätze auf die Lösung der Kompatibilitätsbedingung (3.7) haben. Einsetzen der invertierten Materialgesetze (3.8)–(3.10) liefert

$$\begin{aligned} 0 = & \partial_{rr} \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \left(\Sigma_{\varphi\varphi} - \nu [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] \right) + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{\varphi\varphi} \right] \\ & - \frac{2}{r} \partial_{r\varphi} \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi} + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{r\varphi} \right] \\ & + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \left(\Sigma_{rr} - \nu [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] \right) + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{rr} \right] \\ & - \frac{1}{r} \partial_r \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \left(\Sigma_{rr} - \nu [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] \right) + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{rr} \right] \\ & + \frac{2}{r} \partial_r \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \left(\Sigma_{\varphi\varphi} - \nu [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] \right) + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{\varphi\varphi} \right] \\ & - \frac{2}{r^2} \partial_{\varphi} \left[\frac{c_1}{2\mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi} + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \Psi_{r\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Diese Gleichung lässt sich aufteilen in einen rein von den Mikrodehnungen Ψ_{ij} abhängigen Anteil

$$\begin{aligned} \chi_1(\Psi) := & \frac{c_2 - c_1}{c_2} \left[(\partial_{rr} \Psi_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r} (\partial_{r\varphi} \Psi_{r\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} (\partial_r \Psi_{rr}) + \frac{2}{r} (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r^2} (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}) \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

sowie einen rein von den CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} abhängigen Anteil

$$\begin{aligned} \chi_2(\Sigma) := & \frac{c_1}{2\mu_L c_2} \left[(\partial_{rr} \Sigma_{\varphi\varphi}) - \nu \partial_{rr} [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] - \frac{2}{r} (\partial_{r\varphi} \Sigma_{r\varphi}) \right. \\ & + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{rr}) - \frac{\nu}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] - \frac{1}{r} (\partial_r \Sigma_{rr}) \\ & \left. - \frac{\nu}{r} \partial_r [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] + \frac{2}{r} (\partial_r \Sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r^2} (\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}) \right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

so dass sich Gleichung (3.60) wie folgt darstellen lässt:

$$0 = \chi_1(\Psi) + \chi_2(\Sigma). \quad (3.63)$$

Der Anteil $\chi_2(\Sigma)$ ist sehr unübersichtlich. Allerdings können wir die Gleichgewichtsbedingungen nutzen, um die Nebendiagonalkomponente $\Sigma_{r\varphi}$ sowie deren partielle Ableitungen durch entsprechende Terme proportional zu den Diagonalkomponenten Σ_{rr} und $\Sigma_{\varphi\varphi}$ auszudrücken. Wir erkennen, dass die Nebendiagonalkomponente $\Sigma_{r\varphi}$ in der zweiten Gleichgewichtsbedingung (3.3) explizit auftritt. Daher stellen wir diese nach der Nebendiagonalkomponente $\Sigma_{r\varphi}$ um und differenzieren nach dem Winkel φ :

$$\Sigma_{r\varphi} \stackrel{(3.3)}{=} -\frac{r}{2} (\partial_r \Sigma_{r\varphi}) - \frac{1}{2} (\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}) \implies (\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}) = -\frac{r}{2} (\partial_{r\varphi} \Sigma_{r\varphi}) - \frac{1}{2} (\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}). \quad (3.64)$$

Diese Gleichung enthält zwei zu den Nebendiagonalkomponenten $\Sigma_{r\varphi}$ proportionale Terme. Der erste Summand der rechten Seite ist proportional zu der partiellen Ableitung $(\partial_{r\varphi} \Sigma_{r\varphi})$, die wir mit Hilfe der ersten Gleichgewichtsbedingung (3.2) eliminieren:

$$(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}) = -r (\partial_r \Sigma_{rr}) - \Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}, \quad (3.65)$$

$$(\partial_{r\varphi} \Sigma_{r\varphi}) = -r (\partial_{rr} \Sigma_{rr}) - 2 (\partial_r \Sigma_{rr}) + (\partial_r \Sigma_{\varphi\varphi}). \quad (3.66)$$

Einsetzen von Gleichung (3.66) in Gleichung (3.64) liefert schließlich

$$(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}) = \frac{r^2}{2} (\partial_{rr} \Sigma_{rr}) - \frac{1}{2} (\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}) + r (\partial_r \Sigma_{rr}) - \frac{r}{2} (\partial_r \Sigma_{\varphi\varphi}). \quad (3.67)$$

Durch die Darstellungen (3.67) und (3.66) lässt sich $\chi_2(\Sigma)$ nun kompakt darstellen:

$$\chi_2(\Sigma) = \frac{(1-\nu)c_1}{2\mu_L c_2} \left[\partial_{rr} [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] + \frac{1}{r} \partial_r [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] \right]. \quad (3.68)$$

Nach dieser Vorarbeit setzen wir die asymptotischen Ansatz in die Gleichungen (3.61) – (3.63) ein:

$$0 = \frac{c_2 - c_1}{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[\left(p + \frac{k}{2} \right) \left(p + \frac{k}{2} - 1 \right) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} - 2 \left[p + \frac{k}{2} \right] \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) \right. \\ \left. + \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(k)} \right) - \left(p + \frac{k}{2} \right) \Psi_{rr}^{(k)} + 2 \left(p + \frac{k}{2} \right) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) \right] \quad (3.69)$$

$$+ \frac{(1-\nu)c_1}{2\mu_L c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-3} \left[\left(p + \frac{k}{2} - 1 \right) \left(p + \frac{k}{2} - 2 \right) \left(\Sigma_{rr}^{(k)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) \right. \\ \left. + \partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr}^{(k)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}] + \left[p + \frac{k}{2} - 1 \right] \left(\Sigma_{rr}^{(k)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) \right]. \quad (3.70)$$

Zusammenfassen und Sortieren nach den auftretenden Potenzen von r führt zu folgender Darstellung:

$$0 = \frac{c_2 - c_1}{c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-2} \left[\left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(k)} \right) - 2 \left[p + \frac{k}{2} + 1 \right] \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) \right. \\ \left. - \left(p + \frac{k}{2} \right) \Psi_{rr}^{(k)} + \left(p + \frac{k}{2} \right) \left(p + \frac{k}{2} + 1 \right) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] \quad (3.71)$$

$$+ \frac{(1-\nu)c_1}{2\mu_L c_2} \sum_{k=0}^{\infty} r^{p+\frac{k}{2}-3} \left[\partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}] + \left[p + \frac{k}{2} - 1 \right]^2 (\Sigma_{rr} + \Sigma_{\varphi\varphi}) \right].$$

Hier können wir einen Koeffizientenvergleich auf Basis der Potenzen des Radius r durchführen. Dabei sind die Koeffizienten der ersten Potenzen nur von den Spannungswinkelfunktionen $\Sigma_{ij}^{(k)}$ abhängig:

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}] + (p-1)^2 [\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}], \quad (3.72)$$

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}] + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 [\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}]. \quad (3.73)$$

Diese beiden Differentialgleichungen sind wiederum unabhängig von den Materialparametern. Erst ab der Potenz $p-2$ tritt eine Kopplung mit den Mikrodehnungswinkelfunktionen $\Psi_{ij}^{(k)}$ auf. Wieder erhalten wir durch diese Kopplung eine Abhängigkeit der Differentialgleichungen von den Materialparametern:

$$0 = \frac{(1-\nu)c_1}{2\mu_L c_2} \left[\partial_{\varphi\varphi} [\Sigma_{rr}^{(2)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}] + p^2 (\Sigma_{rr}^{(2)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}) \right] \\ + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \left[\left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 2 [p+1] \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) - p \Psi_{rr}^{(k)} + p (p+1) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] \quad (3.74)$$

3.4.4 Zusammenfassung der Differentialgleichungen der Terme k -ter Ordnung

Bevor wir die Differentialgleichungen explizit lösen, wollen wir die gewonnenen Differentialgleichungssysteme nullter, erster und zweiter Ordnung für die Winkelfunktionen zusammenfassen. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellen ein gekoppeltes Gleichungssystem in Abhängigkeit der Materialparameter dar und sind somit analytisch sehr komplex. Daher fokussieren wir uns auf die Differentialgleichungen nullter und erster Ordnung.

1. Gleichgewichtsbedingungen nullter Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{rr}^{(0)} \right) + p \Sigma_{rr}^{(0)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad 0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + (p+1) \Sigma_{r\varphi}^{(0)}. \quad (3.75)$$

2. Kompatibilitätsbedingung nullter Ordnung:

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} \left[\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + (p-1)^2 \left[\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right]. \quad (3.76)$$

3. HELMHOLTZ-Gleichung nullter Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + [p^2 - 2] \Psi_{rr}^{(0)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (3.77)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + [p^2 - 2] \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} + 2 \Psi_{rr}^{(0)}, \quad (3.78)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + 2 \partial_{\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + (p^2 - 4) \Psi_{r\varphi}^{(0)}. \quad (3.79)$$

Tabelle 3.2.: Differentialgleichungen der Winkelfunktionen nullter Ordnung

1. Gleichgewichtsbedingungen erster Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{rr}^{(1)} \right) + \left(p + \frac{1}{2} \right) \Sigma_{rr}^{(1)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \quad 0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + \left(p + \frac{3}{2} \right) \Sigma_{r\varphi}^{(1)}. \quad (3.80)$$

2. Kompatibilitätsbedingung erster Ordnung:

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} \left[\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right] + \left(p - \frac{1}{2} \right)^2 \left[\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right]. \quad (3.81)$$

3. HELMHOLTZ-Gleichung erster Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(1)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \Psi_{rr}^{(1)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}, \quad (3.82)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} + 2 \Psi_{rr}^{(1)}, \quad (3.83)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(1)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 - 4 \right] \Psi_{r\varphi}^{(1)}. \quad (3.84)$$

Tabelle 3.3.: Differentialgleichungen der Winkelfunktionen erster Ordnung

1. Gleichgewichtsbedingungen zweiter Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(2)} \right) + (p+1) \Sigma_{rr}^{(2)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}, \quad 0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + (p+2) \Sigma_{r\varphi}^{(2)}. \quad (3.85)$$

2. Kompatibilitätsbedingung zweiter Ordnung:

$$0 = \frac{(1-\nu) c_1}{2 \mu_L c_2} \left[\partial_{\varphi\varphi} \left[\Sigma_{rr}^{(2)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \right] + (p+1)^2 \left(\Sigma_{rr}^{(2)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) \right] \\ + \frac{c_2 - c_1}{c_2} \left[\left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 2 [p+1] \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - p \Psi_{rr}^{(k)} + p (p+1) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right]. \quad (3.86)$$

3. HELMHOLTZ-Gleichung zweiter Ordnung:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(2)} \right) - 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 2] \Psi_{rr}^{(2)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{(1-\nu) \Sigma_{rr}^{(0)} - \nu \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}}{2 \mu_L c_2}, \quad (3.87)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + 4 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 2] \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} + 2 \Psi_{rr}^{(2)} + \frac{(1-\nu) \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} - \nu \Sigma_{rr}^{(0)}}{2 \mu_L c_2}, \quad (3.88)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(2)} \right) + 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(2)} \right) - 2 \left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) + [(p+1)^2 - 4] \Psi_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{1}{2 \mu_L c_2} \Sigma_{r\varphi}^{(0)}. \quad (3.89)$$

Tabelle 3.4.: Differentialgleichungen der Winkelfunktionen zweiter Ordnung

3.5 Diskussion der Spannungswinkelfunktionen

3.5.1 Spannungswinkelfunktionen nullter Ordnung

Wir wollen zuerst die Spannungswinkelfunktion nullter Ordnung $\Sigma_{rr}^{(0)}$, $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ und $\Sigma_{r\varphi}^{(0)}$ bestimmen und betrachten hierzu das in Tabelle 3.2 angegebene Gleichungssystem. Um die drei Winkelfunktionen zu bestimmen, lösen wir die beiden Gleichgewichtsbedingungen und die Kompatibilitätsbedingung,

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(0)} \right) + p \Sigma_{rr}^{(0)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (3.90)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + (p+1) \Sigma_{r\varphi}^{(0)}, \quad (3.91)$$

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} \left[\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + (p-1)^2 \left(\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right), \quad (3.92)$$

unter Berücksichtigung der Spannungsrandbedingungen (3.13) beziehungsweise (3.14),

$$0 = \Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi = \pm\pi), \quad 0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi = \pm\pi). \quad (3.93)$$

Wir beginnen mit der Kompatibilitätsbedingung (3.92), die eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Summe $\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ darstellt. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\left[\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right](\varphi) = A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]. \quad (3.94)$$

Da wir keine Spannungsrandbedingungen für diese Summe aus Winkelfunktionen nullter Ordnung zur Verfügung haben, müssen wir die beiden Gleichgewichtsbedingungen betrachten. Wir können die allgemeine Lösung $\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ benutzen, denn durch geschicktes Erweitern von Gleichung (3.90) folgt

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(0)} \right) + p \Sigma_{rr}^{(0)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(0)} \right) + p \left[\Sigma_{rr}^{(0)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - (p+1) \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}. \quad (3.95)$$

Einsetzen der allgemeinen Lösung (3.94) führt zu der Gleichung

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(0)} \right) + p \left(A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi] \right) - (p+1) \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}. \quad (3.96)$$

Um diese Differentialgleichung lösen zu können, müssen wir entweder eine der beiden verbleibenden Winkelfunktionen durch die letzte noch nicht betrachtete Gleichgewichtsbedingung bestimmen oder diese nutzen, um eine der Winkelfunktionen proportional zu der anderen darzustellen. Aufgrund der Form der zweiten Gleichgewichtsbedingung (3.91) liegt letztere Möglichkeit nahe und wir erhalten

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + (p+1) \Sigma_{r\varphi}^{(0)} \implies \Sigma_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{1}{p+1} \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right). \quad (3.97)$$

Setzen wir diese Beziehung in Gleichung (3.96) ein, so erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Spannungswinkelfunktion $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$:

$$\left(\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}\right) + (p+1)^2 \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = p(p+1) \left(A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]\right). \quad (3.98)$$

Für diesen Differentialgleichungstyp gibt es eine allgemeine Lösung, die wir durch Superposition der homogenen Lösung $\Sigma_{r\varphi}^{(0),H}$ mit einer Partikularlösung $\Sigma_{r\varphi}^{(0),P}$ nach Art der Inhomogenität gewinnen:

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0),H} = C_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\varphi] + D_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\varphi], \quad (3.99)$$

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0),P} = E_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + F_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]. \quad (3.100)$$

Wir setzen die Partikularlösung $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0),P}$ in die inhomogene Differentialgleichung (3.98) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & p(p+1) \left(A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]\right) \\ &= -(p-1)^2 \left(E_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + F_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]\right) \\ & \quad + (p+1)^2 \left(E_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + F_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]\right). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Diese Gleichung können wir als Linearkombination aus Kosinus- und Sinustermen darstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(p(p+1)A_{\Sigma}^{(0)} - 4pE_{\Sigma}^{(0)}\right) \cos[(p-1)\varphi] \\ & \quad + \left(p(p+1)B_{\Sigma}^{(0)} - 4pF_{\Sigma}^{(0)}\right) \sin[(p-1)\varphi]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Als Linearkombination linear unabhängiger Funktionen kann diese Gleichung nur dann für beliebige Winkel φ erfüllt sein, wenn beide Koeffiziententerme verschwinden. Diese beiden Bedingungen liefern jeweils die Möglichkeit, eine der Integrationskonstanten zu eliminieren:

$$0 = p(p+1)A_{\Sigma}^{(0)} - 4pE_{\Sigma}^{(0)} \implies E_{\Sigma}^{(0)} = \frac{p+1}{4}A_{\Sigma}^{(0)}, \quad (3.103)$$

$$0 = p(p+1)B_{\Sigma}^{(0)} - 4pF_{\Sigma}^{(0)} \implies F_{\Sigma}^{(0)} = \frac{p+1}{4}B_{\Sigma}^{(0)}. \quad (3.104)$$

Bevor wir die restlichen vier Integrationskonstanten $A_{\Sigma}^{(0)}$, $B_{\Sigma}^{(0)}$, $C_{\Sigma}^{(0)}$ und $D_{\Sigma}^{(0)}$ sowie den Parameter p über die Randbedingungen bestimmen, geben wir die Darstellungen der Winkelfunktionen an und starten mit

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0),H}(\varphi) + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0),P}(\varphi) \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} &= C_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\varphi] + D_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\varphi] \\ & \quad + \frac{p+1}{4}A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + \frac{p+1}{4}B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Die Winkelfunktion $\Sigma_{rr}^{(0)}$ gewinnen wir aus der allgemeinen Lösung (3.94):

$$\Sigma_{rr}^{(0)}(\varphi) = A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi] - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} &= -C_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\varphi] - D_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\varphi] \\ &\quad + \frac{3-p}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] + \frac{3-p}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi] . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Einsetzen von Gleichung (3.106) in Gleichung (3.97) liefert die verbleibende Winkelfunktion $\Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi)$:

$$\Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = -\frac{1}{p+1} \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} &= C_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\varphi] - D_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\varphi] \\ &\quad + \frac{p-1}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\varphi] - \frac{p-1}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\varphi] . \end{aligned} \quad (3.110)$$

Die Randbedingungen haben wir bereits in Unterkapitel 3.2 allgemein diskutiert und angegeben. An dieser Stelle benötigen wir lediglich die homogenen Spannungsrandbedingungen (3.93):

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\pi) &= C_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\pi] - D_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\pi] \\ &\quad + \frac{p-1}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\pi] - \frac{p-1}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\pi] , \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma_{r\varphi}^{(0)}(-\pi) &= -C_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\pi] - D_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\pi] \\ &\quad - \frac{p-1}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\pi] - \frac{p-1}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\pi] , \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\pi) &= C_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\pi] + D_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\pi] \\ &\quad + \frac{p+1}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\pi] + \frac{p+1}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\pi] , \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} 0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(-\pi) &= C_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p+1)\pi] - D_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p+1)\pi] \\ &\quad + \frac{p+1}{4} A_{\Sigma}^{(0)} \cos[(p-1)\pi] - \frac{p+1}{4} B_{\Sigma}^{(0)} \sin[(p-1)\pi] . \end{aligned} \quad (3.114)$$

Addieren oder Subtrahieren wir die Gleichungen (3.111) und (3.112) oder die Gleichungen (3.113) und (3.114), so folgt jeweils ein homogenes Gleichungssystem für zwei der vier Integrationskonstanten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos[(p+1)\pi] & \frac{p-1}{2} \cos[(p-1)\pi] \\ 2 \sin[(p+1)\pi] & \frac{p+1}{2} \sin[(p-1)\pi] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Sigma}^{(0)} \\ B_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} , \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin[(p+1)\pi] & \frac{p-1}{2} \sin[(p-1)\pi] \\ 2 \cos[(p+1)\pi] & \frac{p+1}{2} \cos[(p-1)\pi] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{\Sigma}^{(0)} \\ A_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} . \quad (3.116)$$

Für ein homogenes, lineares Gleichungssystem existiert nur dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Determinante der entsprechenden Koeffizientenmatrix verschwindet. Daher bestimmen wir für beide Koeffizientenmatrizen die Determinanten und setzen diese zu Null. Aus Gleichung (3.115) ergibt sich:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2 \cos[(p+1)\pi] & \frac{p-1}{2} \cos[(p-1)\pi] \\ 2 \sin[(p+1)\pi] & \frac{p+1}{2} \sin[(p-1)\pi] \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$= (p+1) \sin[(p-1)\pi] \cos[(p+1)\pi] - (p-1) \cos[(p-1)\pi] \sin[(p+1)\pi]. \quad (3.118)$$

Aus dem zweiten Gleichungssystem (3.116) ergibt sich hingegen:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2 \sin[(p+1)\pi] & \frac{p-1}{2} \sin[(p-1)\pi] \\ 2 \cos[(p+1)\pi] & \frac{p+1}{2} \cos[(p-1)\pi] \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

$$= (p+1) \cos[(p-1)\pi] \sin[(p+1)\pi] - (p-1) \sin[(p-1)\pi] \cos[(p+1)\pi]. \quad (3.120)$$

Sowohl die Bedingung (3.118) als auch die Bedingung (3.120) ist erfüllt, wenn der Parameter p derart gewählt wird, dass in allen Summanden jeweils eine trigonometrische Funktion verschwindet:

$$\left(p \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad p \in \left\{ \frac{1}{2} + n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \right) \implies p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}. \quad (3.121)$$

Eine zusätzliche Forderung an den Parameter p ist, dass die Verschiebungen $u_i(r, \varphi)$, die proportional zur p -ten Potenz des Radius r sind, regulär sein müssen. Insbesondere dürfen diese aber auch nicht konstant sein, da dies einer reinen Starrkörpertranslation entsprechen würde. Wir wählen den kleinstmöglichen Wert des Parameters p , der alle Bedingungen erfüllt, da dieser die stärkste Singularität charakterisiert:

$$\left(p > 0 \quad \wedge \quad p \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right) \longrightarrow p = p_{\min} = \frac{1}{2}. \quad (3.122)$$

Damit vereinfachen sich die beiden Gleichungssysteme (3.115) sowie (3.116) und wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos\left[\frac{3}{2}\pi\right] & -\frac{1}{4} \cos\left[-\frac{1}{2}\pi\right] \\ 2 \sin\left[\frac{3}{2}\pi\right] & \frac{3}{4} \sin\left[-\frac{1}{2}\pi\right] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Sigma}^{(0)} \\ B_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{\Sigma}^{(0)} \\ B_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} \implies D_{\Sigma}^{(0)} = -\frac{3}{8} B_{\Sigma}^{(0)}, \quad (3.123)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin\left[\frac{3}{2}\pi\right] & -\frac{1}{4} \sin\left[-\frac{1}{2}\pi\right] \\ 2 \cos\left[\frac{3}{2}\pi\right] & \frac{3}{4} \cos\left[-\frac{1}{2}\pi\right] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{\Sigma}^{(0)} \\ A_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{\Sigma}^{(0)} \\ A_{\Sigma}^{(0)} \end{pmatrix} \implies C_{\Sigma}^{(0)} = \frac{1}{8} A_{\Sigma}^{(0)}. \quad (3.124)$$

Die Symmetriebedingungen (3.30) bzw. (3.34) ordnen die unbekannten Integrationskonstanten $A_{\Sigma}^{(0)}$ bzw. $B_{\Sigma}^{(0)}$ dem Modus I bzw. II zu. Daher definieren wir $A_I^{(0)} := A_{\Sigma}^{(0)}$ bzw. $B_I^{(0)} := B_{\Sigma}^{(0)}$ und fassen die Spannungswinkelfunktionen nullter Ordnung zusammen. Die gewonnenen Lösungen nullter Ordnung stimmen mit den klassischen Lösungen der linearen Bruchmechanik überein (siehe beispielsweise HELLAN [22]):

$$\Sigma_{rr}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{8} A_{\Sigma,I}^{(0)} \left(5 \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right) - \frac{1}{8} B_{\Sigma,II}^{(0)} \left(5 \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] - 3 \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right), \quad (3.125)$$

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{8} A_{\Sigma,I}^{(0)} \left(3 \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right) - \frac{3}{8} B_{\Sigma,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right), \quad (3.126)$$

$$\Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{8} A_{\Sigma,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{8} B_{\Sigma,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + 3 \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] \right). \quad (3.127)$$

Tabelle 3.5.: Spannungswinkelfunktionen nullter Ordnung

3.5.2 Spannungswinkelfunktionen erster Ordnung

Das Gleichungssystem der Spannungswinkelfunktionen erster Ordnung folgt aus Tabelle 3.3 mit $p = \frac{1}{2}$:

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{r\varphi}^{(1)} \right) + \Sigma_{rr}^{(1)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}, \quad (3.128)$$

$$0 = \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) + 2 \Sigma_{r\varphi}^{(1)}, \quad (3.129)$$

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} \left[\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right]. \quad (3.130)$$

Die entsprechenden Spannungsrandbedingungen (3.13) sowie (3.14)) lauten

$$0 = \Sigma_{r\varphi}^{(1)}(\varphi = \pm\pi), \quad 0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi = \pm\pi). \quad (3.131)$$

Dieses Gleichungssystem ist einfacher als das entsprechende Gleichungssystem nullter Ordnung. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.130) lautet beispielsweise:

$$\left[\Sigma_{rr}^{(1)} + \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} \right](\varphi) = A_{\Sigma}^{(1)} \varphi + B_{\Sigma}^{(1)}. \quad (3.132)$$

Wir eliminieren in der Differentialgleichung (3.128) die Winkelfunktion $\Sigma_{r\varphi}^{(1)}$ durch Gleichung (3.129):

$$\Sigma_{r\varphi}^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi} \right) \stackrel{(3.128)}{\implies} 0 = -\frac{1}{2} \left(\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi} \right) + \Sigma_{rr}^{(1)} - \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}. \quad (3.133)$$

Die Winkelfunktion $\Sigma_{rr}^{(1)}$ eliminieren wir durch Einsetzen von Gleichung (3.132) und erhalten somit für die Winkelfunktion $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ die inhomogene Differentialgleichung

$$\left(\partial_{\varphi\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}\right) + 4 \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 2 \left(A_{\Sigma}^{(1)} \varphi + B_{\Sigma}^{(1)}\right). \quad (3.134)$$

Wiederum gewinnen wir eine allgemeine Lösung durch Superposition von $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1),H}(\varphi)$ und $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1),P}(\varphi)$:

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) = \left(C_{\Sigma}^{(1)} \cos[2\varphi] + D_{\Sigma}^{(1)} \sin[2\varphi]\right) + \frac{1}{2} \left(A_{\Sigma}^{(1)} \varphi + B_{\Sigma}^{(1)}\right). \quad (3.135)$$

Die Spannungsrandbedingung (3.131)₂ der Umfangsspannung $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}$ führt auf die Gleichungen

$$0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\pi) = C_{\Sigma}^{(1)} + \frac{1}{2} A_{\Sigma}^{(1)} \pi + \frac{1}{2} B_{\Sigma}^{(1)}, \quad (3.136)$$

$$0 = \Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(-\pi) = C_{\Sigma}^{(1)} - \frac{1}{2} A_{\Sigma}^{(1)} \pi + \frac{1}{2} B_{\Sigma}^{(1)}. \quad (3.137)$$

Subtrahieren beziehungsweise Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$A_{\Sigma}^{(1)} = 0, \quad C_{\Sigma}^{(1)} = -\frac{1}{2} B_{\Sigma}^{(1)}. \quad (3.138)$$

Aus der Spannungsrandbedingung (3.131)₁ der Schubspannung $\Sigma_{r\varphi}^{(1)}$ folgt dann die Bedingung

$$0 = \Sigma_{r\varphi}^{(1)}(\pm\pi) = -\frac{1}{2} \left(\partial_{\varphi} \Sigma_{\varphi\varphi}\right)(\pm\pi) = -D_{\Sigma}^{(1)} \implies D_{\Sigma}^{(1)} = 0. \quad (3.139)$$

Aus den beiden Gleichungen (3.132) sowie (3.133)₁ gewinnen wir den Verlauf der Radialspannung $\Sigma_{rr}^{(1)}$ sowie der Schubspannung $\Sigma_{r\varphi}^{(1)}$. Mittels der Symmetriebedingungen (3.30) und (3.34) ordnen wir die verbliebene Integrationskonstante $B_{\Sigma}^{(1)}$ eindeutig dem Modus I zu. Mit der Definition $B_I^{(1)} := \tilde{k}_I$ folgen die klassischen Verläufe erster Ordnung (siehe beispielsweise KIM UND PAULINO [27]):

$$\Sigma_{rr}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} \tilde{k}_I \left(1 + \cos[2\varphi]\right) = \tilde{k}_I \cos^2 \varphi, \quad (3.140)$$

$$\Sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} \tilde{k}_I \left(1 - \cos[2\varphi]\right) = \tilde{k}_I \sin^2 \varphi, \quad (3.141)$$

$$\Sigma_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) = -\frac{1}{2} \tilde{k}_I \sin[2\varphi] = -\tilde{k}_I \sin \varphi \cos \varphi. \quad (3.142)$$

Tabelle 3.6.: Spannungswinkelfunktionen erster Ordnung

3.6 Diskussion der Mikrodehnungswinkelfunktionen

3.6.1 Mikrodehnungswinkelfunktionen nullter Ordnung

Zur Bestimmung der Mikrodehnungswinkelfunktionen nullter Ordnung $\Psi_{rr}^{(0)}$, $\Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}$ und $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ lösen wir das Differentialgleichungssystem der HELMHOLTZ-Gleichung aus Tabelle 3.2,

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(0)}) - 4 (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) - \frac{7}{4} \Psi_{rr}^{(0)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (3.143)$$

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}) + 4 (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) - \frac{7}{4} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} + 2 \Psi_{rr}^{(0)}, \quad (3.144)$$

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) + 2 \partial_{\varphi} [\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}] - \frac{15}{4} \Psi_{r\varphi}^{(0)}, \quad (3.145)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen (3.22), (3.23) sowie (3.26),

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi), \quad (3.146)$$

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(0)}) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi), \quad (3.147)$$

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) + \Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi). \quad (3.148)$$

Wir eliminieren die Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ durch Addition der beiden Gleichungen (3.143) und (3.144). Das führt auf die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}] + \frac{1}{4} [\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}], \quad (3.149)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$[\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}](\varphi) = A_{\Psi}^{(0)} \cos\left[\frac{1}{2}\varphi\right] + B_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\frac{1}{2}\varphi\right]. \quad (3.150)$$

Bilden wir die Superposition der Randbedingungen (3.146) und (3.147), so erhalten wir

$$0 = \partial_{\varphi} [\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}](\varphi = \pm\pi) = \mp \frac{1}{2} A_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{2} B_{\Psi}^{(0)} \cos\left[\frac{\pi}{2}\right] \implies A_{\Psi}^{(0)} = 0. \quad (3.151)$$

Subtrahieren der beiden Differentialgleichungen (3.143) und (3.144) liefert eine Möglichkeit, die erste partielle Ableitung der Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ durch die beiden anderen Winkelfunktionen auszudrücken:

$$(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) = \frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}] - \frac{15}{4} [\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}] \right). \quad (3.152)$$

Beim Betrachten der Differentialgleichung (3.145) fällt auf, dass wir mit Hilfe von Gleichung (3.152) die Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ eliminieren können. Daher differenzieren wir Gleichung (3.145) ein weiteres Mal:

$$0 = \left(\partial_{\varphi\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) + 2 \partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - \frac{15}{4} \left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right). \quad (3.153)$$

Hier können wir nun Gleichung (3.152) einsetzen und erhalten die Differentialgleichung

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} \left[\frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - \frac{15}{4} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] \right) \right] + 2 \partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - \frac{15}{4} \left[\frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - \frac{15}{4} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] \right) \right]. \quad (3.154)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + \frac{34}{4} \partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + \frac{225}{16} \left[\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] \right). \quad (3.155)$$

Wir erkennen die Möglichkeit, die allgemeine Lösung (3.150) der Summe $\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}$ zu nutzen, indem wir geschickt erweitern. Zusätzlich multiplizieren wir anschließend die Gleichung mit 4, um auf die höchste Ableitung der Winkelfunktion $\Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}$ zu normieren:

$$0 = \frac{1}{2} \partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + \frac{17}{4} \partial_{\varphi\varphi} \left[\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] + \frac{225}{32} \left[\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right] - \left(\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) - \frac{17}{2} \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) - \frac{225}{16} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}. \quad (3.156)$$

Stellen wir diese Gleichung um und setzen die allgemeine Lösung (3.150) der Summe $\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}$ ein, so gewinnen wir eine inhomogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\left(\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + \frac{17}{2} \left(\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + \frac{225}{16} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} = 6 B_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right]. \quad (3.157)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann mit Standardmethoden ermittelt werden. Wir erhalten die folgende allgemeine Lösung mit fünf Integrationskonstanten:

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2} B_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + E_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + F_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] + C_{\Psi}^{(0)} \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + D_{\Psi}^{(0)} \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right]. \quad (3.158)$$

Daraus ergibt sich mit Gleichung (3.150) und dem Ergebnis (3.151) die radiale Winkelfunktion

$$\Psi_{rr}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2} B_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] - E_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - F_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] - C_{\Psi}^{(0)} \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - D_{\Psi}^{(0)} \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right]. \quad (3.159)$$

Die allgemeine Lösung der Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ erhalten wir nach Integration von Gleichung (3.152) zu

$$\Psi_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = C_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\frac{3}{2}\varphi\right] + D_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\frac{5}{2}\varphi\right] - E_{\Psi}^{(0)} \cos\left[\frac{3}{2}\varphi\right] - F_{\Psi}^{(0)} \cos\left[\frac{5}{2}\varphi\right] + G_{\Psi}^{(0)}. \quad (3.160)$$

Wir haben in Gleichung (3.151) bereits eine der Randbedingungen verwendet, das heißt wir haben nur noch zwei Randbedingungen zur Verfügung, um die restlichen sechs Konstanten zu bestimmen. Bei der weiteren Bestimmung der Mikrodehnungswinkelfunktionen erwarten wir eine zur Bestimmung der Spannungswinkelfunktionen analoge Situation. Die fehlenden zwei Bedingungen erhalten wir aus den Symmetrieeigenschaften der Mikrodehnung Ψ . Hierfür treffen wir eine Fallunterscheidung.

Symmetriebedingungen von Modus I

Die Symmetriebedingungen von Modus I haben wir bereits in Gleichung (3.28) angegeben:

$$\Psi_{rr}^I(r, \varphi) = \Psi_{rr}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, \varphi) = \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{r\varphi}^I(r, \varphi) = -\Psi_{r\varphi}^I(r, -\varphi). \quad (3.161)$$

Aus den ersten beiden Symmetriebedingungen folgt jeweils die gleiche Aussage:

$$\Psi_{rr}^I(r, \varphi) = \Psi_{rr}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, \varphi) = \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, -\varphi) \implies B_{\Psi}^{(0)}, E_{\Psi}^{(0)}, F_{\Psi}^{(0)} = 0. \quad (3.162)$$

Die dritte und letzte Symmetriebedingung fordert, dass die Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ eine ungerade Funktion des Winkels φ sein muss und insbesondere für $\varphi = 0$ verschwinden muss. Daher folgern wir

$$\Psi_{r\varphi}^I(r, \varphi) = -\Psi_{r\varphi}^I(r, -\varphi) \implies G_{\Psi}^{(0)} = 0. \quad (3.163)$$

Beide nicht identisch erfüllten Randbedingungen (3.146) beziehungsweise (3.147) führen zur selben Aussage. Zusammen mit den beiden Verläufen aus Gleichung (3.159) und (3.160) erhalten wir

$$0 = \left[\left(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi) = - \left[\left(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(0)} \right) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi) \quad (3.164)$$

$$= \left(-\frac{3}{2} + 2 \right) C_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\pm\frac{3}{2}\pi\right] + \left(-\frac{5}{2} + 2 \right) D_{\Psi}^{(0)} \sin\left[\pm\frac{5}{2}\pi\right] = \mp\frac{1}{2} C_{\Psi}^{(0)} \mp\frac{1}{2} D_{\Psi}^{(0)}. \quad (3.165)$$

Somit folgern wir, dass $C_{\Psi}^{(0)} = -D_{\Psi}^{(0)}$ gelten muss und erhalten die folgenden Verläufe für Modus I:

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{I,(0)}(\varphi) = -\Psi_{rr}^{I,(0)}(\varphi) = C_{\Psi}^{(0)} \left(\cos\left[\frac{3}{2}\varphi\right] - \cos\left[\frac{5}{2}\varphi\right] \right), \quad (3.166)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{I,(0)}(\varphi) = C_{\Psi}^{(0)} \left(\sin\left[\frac{3}{2}\varphi\right] - \sin\left[\frac{5}{2}\varphi\right] \right). \quad (3.167)$$

Symmetriebedingungen von Modus II

Die Symmetriebedingungen (3.32) von Modus II behandeln wir weitestgehend analog:

$$\Psi_{rr}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{rr}^{II}(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, -\varphi), \quad \Psi_{r\varphi}^{II}(r, \varphi) = \Psi_{r\varphi}^{II}(r, -\varphi). \quad (3.168)$$

Die ersten beiden Symmetriebedingungen führen jeweils zur Schlussfolgerung, dass

$$\Psi_{rr}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{rr}^{II}(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, -\varphi) \implies C_{\Psi}^{(0)}, D_{\Psi}^{(0)} = 0. \quad (3.169)$$

Die Forderung, dass die Winkelfunktion $\Psi_{r\varphi}^{(0)}$ eine gerade Funktion des Winkels φ sein muss, liefert keine zusätzliche Information, da gerade Funktionen konstante Terme enthalten dürfen. Betrachten wir die Randbedingung (3.146) beziehungsweise (3.147) und setzen die Verläufe aus den Gleichungen (3.160) und (3.158) beziehungsweise (3.159) ein, so verschwinden alle Kosinusterme und wir gewinnen

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(0)}) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right] (\varphi = \pm\pi) \implies G_{\Psi}^{(0)} = 0. \quad (3.170)$$

Die verbleibende Randbedingung (3.148) liefert folgende Bedingung:

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(0)}) + [\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}] \right] (\varphi = \pm\pi) \quad (3.171)$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 2 \right) E_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\pm \frac{3}{2} \pi \right] + \left(\frac{5}{2} - 2 \right) F_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\pm \frac{5}{2} \pi \right] = \pm \frac{1}{2} E_{\Psi}^{(0)} \pm \frac{1}{2} F_{\Psi}^{(0)}. \quad (3.172)$$

Zusammen mit der Folgerung $E_{\Psi}^{(0)} = -F_{\Psi}^{(0)}$ ergeben sich somit die folgenden Verläufe für Modus II:

$$\Psi_{rr}^{II,(0)}(\varphi) = \frac{1}{2} B_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] - E_{\Psi}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \quad (3.173)$$

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{II,(0)}(\varphi) = \frac{1}{2} B_{\Psi}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] + E_{\Psi}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \quad (3.174)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{II,(0)}(\varphi) = -E_{\Psi}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right). \quad (3.175)$$

Der Verlauf eines allgemeinen Belastungsfalls ergibt sich unter Vernachlässigung der Torsionsbelastung des Modus III als Superposition der beiden Verläufe für Modus I und Modus II, das heißt $\Psi_{ij}^{(0)} = \Psi_{ij}^{I,(0)} + \Psi_{ij}^{II,(0)}$. Die Integrationskonstanten ordnen wir gemäß der Symmetriebedingungen (3.28) bzw. (3.32) dem Modus I bzw. II zu und erhalten mit den Definitionen $C_{\Psi,I}^{(0)} := C_{\Psi}^{(0)}$, $B_{\Psi,II}^{(0)} := B_{\Psi}^{(0)}$ bzw. $E_{\Psi,II}^{(0)} := E_{\Psi}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \Psi_{rr}^{(0)}(\varphi) = & -C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} B_{\Psi,II}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ & - E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \end{aligned} \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) = & C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} B_{\Psi,II}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ & + E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \end{aligned} \quad (3.177)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) = C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) - E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right). \quad (3.178)$$

Tabelle 3.7.: Mikrodehnungswinkelfunktionen nullter Ordnung

3.6.2 Mikrodehnungswinkelfunktionen erster Ordnung

Das Differentialgleichungssystem der HELMHOLTZ-Gleichung erster Ordnung aus Tabelle 3.3 lautet:

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{rr}^{(1)}) - 4 (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) - \Psi_{rr}^{(1)} + 2 \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}, \quad (3.179)$$

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) + 4 (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} + 2 \Psi_{rr}^{(1)}, \quad (3.180)$$

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) + 2 \partial_{\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] - 3 \Psi_{r\varphi}^{(1)}, \quad (3.181)$$

zusammen mit den entsprechenden Randbedingungen

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right] (\varphi = \pm\pi), \quad (3.182)$$

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(1)}) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right] (\varphi = \pm\pi), \quad (3.183)$$

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) + \Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right] (\varphi = \pm\pi). \quad (3.184)$$

Durch Addition der ersten beiden Differentialgleichungen (3.179) und (3.180) gewinnen wir wieder eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$0 = \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] + [\Psi_{rr}^{(1)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \implies [\Psi_{rr}^{(1)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}](\varphi) = A_{\Psi}^{(1)} \cos \varphi + B_{\Psi}^{(1)} \sin \varphi . \quad (3.185)$$

Analog zur Vorgehensweise bei der Bestimmung der Mikrodehnungswinkelfunktionen nullter Ordnung betrachten wir die Superposition der beiden Randbedingungen (3.182) und (3.183):

$$0 = \partial_{\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}](\pm\pi) = -A_{\Psi}^{(1)} \sin[\pm\pi] + B_{\Psi}^{(1)} \cos[\pm\pi] \implies B_{\Psi}^{(1)} = 0 . \quad (3.186)$$

Auch das weitere Vorgehen ist analog zur Situation der nullten Ordnung. Wir subtrahieren die beiden Gleichungen (3.179) und (3.180) und gewinnen

$$(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) = \frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] - 3 [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \right) . \quad (3.187)$$

Als Nächstes differenzieren wir Gleichung (3.181) und setzen Gleichung (3.187) ein. Daraus ergibt sich

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) + 2 \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] - 3 (\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)}) \quad (3.188)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] - 3 \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \right) + 2 \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \quad (3.189)$$

$$- \frac{3}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] - 3 [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \right) \quad (3.190)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] + 10 \partial_{\varphi\varphi} [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] + 9 [\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}] \right) . \quad (3.191)$$

Erweitern auf die Summe $\Psi_{rr}^{(1)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}$ und normieren auf die höchste auftretende Ableitung liefert mit Gleichung (3.185) die homogene Differentialgleichung

$$0 = (\partial_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) + 10 (\partial_{\varphi\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) + 9 \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} . \quad (3.192)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist einfach bestimmbar und lautet

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) = C_{\Psi}^{(1)} \cos \varphi + D_{\Psi}^{(1)} \cos[3\varphi] + E_{\Psi}^{(1)} \sin \varphi + F_{\Psi}^{(1)} \sin[3\varphi] . \quad (3.193)$$

Zusammen mit den Gln. (3.185) und (3.186) erhalten wir

$$\Psi_{rr}^{(1)}(\varphi) = (A_{\Psi}^{(1)} - C_{\Psi}^{(1)}) \cos \varphi - D_{\Psi}^{(1)} \cos[3\varphi] - E_{\Psi}^{(1)} \sin \varphi - F_{\Psi}^{(1)} \sin[3\varphi] . \quad (3.194)$$

Analog der Situation bei der Bestimmung der Winkelfunktionen nullter Ordnung erhalten wir die dritte Winkelfunktion aus Gleichung (3.187) zu

$$\Psi_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) = -\frac{1}{2} \left(A_{\Psi}^{(1)} - 2 C_{\Psi}^{(1)} \right) \sin \varphi + D_{\Psi}^{(1)} \sin[3\varphi] - E_{\Psi}^{(1)} \cos \varphi - F_{\Psi}^{(1)} \cos[3\varphi] + G_{\Psi}^{(1)}. \quad (3.195)$$

Wir können auch hier nicht genügend Randbedingungen formulieren und müssen daher die Symmetriebedingungen in einer Fallunterscheidung für Modus I und Modus II berücksichtigen.

Symmetriebedingungen von Modus I

Die Symmetriebedingungen von Modus I für die Terme erster Ordnung lauten nach Gleichung (3.28):

$$\Psi_{rr}^I(r, \varphi) = \Psi_{rr}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, \varphi) = \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{r\varphi}^I(r, \varphi) = -\Psi_{r\varphi}^I(r, -\varphi). \quad (3.196)$$

Die ersten beiden Forderungen liefern uns wieder jeweils die selben Informationen:

$$\Psi_{rr}^I(r, \varphi) = \Psi_{rr}^I(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, \varphi) = \Psi_{\varphi\varphi}^I(r, -\varphi) \implies E_{\Psi}^{(1)}, F_{\Psi}^{(1)} = 0. \quad (3.197)$$

Entsprechend liefert die dritte Symmetriebedingung folgende Integrationskonstante:

$$\Psi_{r\varphi}^I(r, \varphi) = -\Psi_{r\varphi}^I(r, -\varphi) \implies G_{\Psi}^{(1)} = 0. \quad (3.198)$$

Die ersten beiden Randbedingungen (3.182) und (3.183) sind in diesem Fall identisch erfüllt. Die dritte Randbedingung (3.184) liefert uns zusätzliche Informationen:

$$0 = \left[\left(\partial_{\varphi} \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right) + \left[\Psi_{rr}^{(1)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)} \right] \right] (\varphi = \pm\pi) \quad (3.199)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \left(A_{\Psi}^{(1)} - 2 C_{\Psi}^{(1)} \right) \cos[\pm\pi] + (3-2) D_{\Psi}^{(1)} \cos[\pm 3\pi]. \quad (3.200)$$

Damit ergibt sich folgende Beziehung der Integrationskonstanten:

$$\frac{1}{2} \left(A_{\Psi}^{(1)} - 2 C_{\Psi}^{(1)} \right) = -D_{\Psi}^{(1)} \implies C_{\Psi}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(A_{\Psi}^{(1)} + 2 D_{\Psi}^{(1)} \right). \quad (3.201)$$

Die entsprechenden Mikrodehnungswinkelfunktionen erster Ordnung für Modus I lauten

$$\Psi_{rr}^{I,(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} A_{\Psi}^{(1)} \cos \varphi - D_{\Psi}^{(1)} \left(\cos \varphi + \cos[3\varphi] \right), \quad (3.202)$$

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{I,(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} A_{\Psi}^{(1)} \cos \varphi + D_{\Psi}^{(1)} \left(\cos \varphi + \cos[3\varphi] \right), \quad (3.203)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{I,(1)}(\varphi) = D_{\Psi}^{(1)} \left(\sin \varphi + \sin[3\varphi] \right). \quad (3.204)$$

Symmetriebedingungen von Modus II

Die Symmetriebedingungen von Modus II ergeben sich erneut aus Gleichung (3.28):

$$\Psi_{rr}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{rr}^{II}(r, -\varphi), \quad \Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, -\varphi), \quad \Psi_{r\varphi}^{II}(r, \varphi) = \Psi_{r\varphi}^{II}(r, -\varphi). \quad (3.205)$$

Die ersten beiden Symmetriebedingungen implizieren in diesem Fall

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{\varphi\varphi}^{II}(r, -\varphi) \implies C_{\Psi}^{(1)}, D_{\Psi}^{(1)} = 0, \quad (3.206)$$

$$\Psi_{rr}^{II}(r, \varphi) = -\Psi_{rr}^{II}(r, -\varphi) \implies A_{\Psi}^{(1)} = 0. \quad (3.207)$$

Die dritte Randbedingung (3.184) wird identisch erfüllt. Die beiden ersten Randbedingungen (3.182) und (3.183) führen hingegen auf ein und die selbe Bedingung:

$$0 = \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right] (\varphi = \pm\pi) = - \left[(\partial_{\varphi} \Psi_{rr}^{(1)}) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(1)} \right] (\varphi = \pm\pi) \quad (3.208)$$

$$= (1-2) E_{\Psi}^{(1)} \cos[\pm\pi] + (3-2) F_{\Psi}^{(1)} \cos[\pm 3\pi] + 2 G_{\Psi}^{(0)}. \quad (3.209)$$

Auswerten der Kosinusterme führt auf die folgende Beziehung der Integrationskonstanten

$$G_{\Psi}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[F_{\Psi}^{(1)} - E_{\Psi}^{(1)} \right]. \quad (3.210)$$

Die daraus resultierenden Mikrodehnungswinkelfunktionen erster Ordnung für Modus II lauten:

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{II,(1)}(\varphi) = -\Psi_{rr}^{II,(1)}(\varphi) = E_{\Psi}^{(1)} \sin \varphi + F_{\Psi}^{(1)} \sin[3\varphi], \quad (3.211)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{II,(1)}(\varphi) = -E_{\Psi}^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) + F_{\Psi}^{(1)} \left(\frac{1}{2} - \cos[3\varphi] \right). \quad (3.212)$$

Die Superposition $\Psi_{ij}^{(1)} = \Psi_{ij}^{I,(1)} + \Psi_{ij}^{II,(1)}$ liefert zusammen mit den Definitionen $A_{\Psi,I} := A_{\Psi}^{(1)}$, $D_{\Psi,I} := D_{\Psi}^{(1)}$, $E_{\Psi,II} := E_{\Psi}^{(1)}$ und $F_{\Psi,II} := F_{\Psi}^{(1)}$ gemäß der Symmetriebedingungen (3.28) beziehungsweise (3.32) :

$$\Psi_{rr}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} A_{\Psi,I}^{(1)} \cos \varphi - D_{\Psi,I}^{(1)} \left(\cos \varphi + \cos[3\varphi] \right) - E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi - F_{\Psi,II}^{(1)} \sin[3\varphi], \quad (3.213)$$

$$\Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} A_{\Psi,I}^{(1)} \cos \varphi + D_{\Psi,I}^{(1)} \left(\cos \varphi + \cos[3\varphi] \right) + E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi + F_{\Psi,II}^{(1)} \sin[3\varphi], \quad (3.214)$$

$$\Psi_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) = D_{\Psi,I}^{(1)} \left(\sin \varphi + \sin[3\varphi] \right) - E_{\Psi,II}^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) + F_{\Psi,II}^{(1)} \left(\frac{1}{2} - \cos[3\varphi] \right). \quad (3.215)$$

Tabelle 3.8.: Mikrodehnungswinkelfunktionen erster Ordnung

3.7 Diskussion der Hyperspannungswinkelfunktionen

Wir betrachten die asymptotischen Ansätze im Zusammenhang mit dem Materialgesetz (2.71)₃:

$$\boldsymbol{\mu} = c_1 c_3 \nabla \Psi : \mathbb{C} \implies \mu_{ijk} = c_1 c_3 (\nabla \Psi)_{imn} \mathbb{C}_{mnjk} = \sum_{s=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \mu_{ijk}^{(s)}(\varphi) . \quad (3.216)$$

Die nicht-verschwindenden Komponenten der Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ lauten:

$$\begin{aligned} \mu_{rrr} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{rrr} \mathbb{C}_{rrrr} + (\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi rr} + (\nabla \Psi)_{rzz} \mathbb{C}_{zzrr} \right] \\ &= c_1 c_3 \left[(\partial_r \Psi_{rr}) \mathbb{C}_{rrrr} + (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) \mathbb{C}_{\varphi\varphi rr} + (\partial_r \Psi_{zz}) \mathbb{C}_{zzrr} \right], \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\begin{aligned} \mu_{r\varphi\varphi} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{rrr} \mathbb{C}_{rr\varphi\varphi} + (\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + (\nabla \Psi)_{rzz} \mathbb{C}_{zz\varphi\varphi} \right] \\ &= c_1 c_3 \left[(\partial_r \Psi_{rr}) \mathbb{C}_{rr\varphi\varphi} + (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) \mathbb{C}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + (\partial_r \Psi_{zz}) \mathbb{C}_{zz\varphi\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.218)$$

$$\begin{aligned} \mu_{rzz} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{rrr} \mathbb{C}_{rrzz} + (\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi zz} + (\nabla \Psi)_{rzz} \mathbb{C}_{zzzz} \right] \\ &= c_1 c_3 \left[(\partial_r \Psi_{rr}) \mathbb{C}_{rrzz} + (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) \mathbb{C}_{\varphi\varphi zz} + (\partial_r \Psi_{zz}) \mathbb{C}_{zzzz} \right], \end{aligned} \quad (3.219)$$

$$\mu_{rr\varphi} = 2 c_1 c_3 (\nabla \Psi)_{rr\varphi} \mathbb{C}_{r\varphi r\varphi} = 2 c_1 c_3 (\partial_r \Psi_{r\varphi}) \mathbb{C}_{r\varphi r\varphi}, \quad (3.220)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi rr} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{\varphi rr} \mathbb{C}_{rrrr} + (\nabla \Psi)_{\varphi\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi rr} + (\nabla \Psi)_{\varphi zz} \mathbb{C}_{zzrr} \right] \\ &= \frac{1}{r} c_1 c_3 \left[[(\partial_\varphi \Psi_{rr}) - 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{rrrr} + [(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) + 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{\varphi\varphi rr} \right], \end{aligned} \quad (3.221)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi\varphi\varphi} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{\varphi rr} \mathbb{C}_{rr\varphi\varphi} + (\nabla \Psi)_{\varphi\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + (\nabla \Psi)_{\varphi zz} \mathbb{C}_{zz\varphi\varphi} \right] \\ &= \frac{1}{r} c_1 c_3 \left[[(\partial_\varphi \Psi_{rr}) - 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{rr\varphi\varphi} + [(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) + 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \right], \end{aligned} \quad (3.222)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi zz} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{\varphi rr} \mathbb{C}_{rrzz} + (\nabla \Psi)_{\varphi\varphi\varphi} \mathbb{C}_{\varphi\varphi zz} + (\nabla \Psi)_{\varphi zz} \mathbb{C}_{zzzz} \right] \\ &= \frac{1}{r} c_1 c_3 \left[[(\partial_\varphi \Psi_{rr}) - 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{rrzz} + [(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) + 2 \Psi_{r\varphi}] \mathbb{C}_{\varphi\varphi zz} \right], \end{aligned} \quad (3.223)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi r\varphi} &= c_1 c_3 \left[(\nabla \Psi)_{\varphi r\varphi} \mathbb{C}_{r\varphi r\varphi} + (\nabla \Psi)_{\varphi\varphi r} \mathbb{C}_{\varphi rr\varphi} \right] \\ &= \frac{2}{r} c_1 c_3 \left[(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}) + [\Psi_{rr} - \Psi_{\varphi\varphi}] \right] \mathbb{C}_{r\varphi r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.224)$$

Setzen wir hier die Komponenten $\mathbb{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ des klassischen Elastizitätstensors ein, so erhalten wir

$$\mu_{rrr} = c_1 c_3 \left[[\lambda_L + 2\mu_L] (\partial_r \Psi_{rr}) + \lambda_L (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) \right], \quad (3.225)$$

$$\mu_{r\varphi\varphi} = c_1 c_3 \left[\lambda_L (\partial_r \Psi_{rr}) + [\lambda_L + 2\mu_L] (\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}) \right], \quad (3.226)$$

$$\mu_{rzz} = c_1 c_3 \lambda_L \partial_r [\Psi_{rr} + \Psi_{\varphi\varphi}], \quad (3.227)$$

$$\mu_{rr\varphi} = 2 c_1 c_3 \mu_L (\partial_r \Psi_{r\varphi}), \quad (3.228)$$

$$\mu_{\varphi rr} = \frac{1}{r} c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr} + \Psi_{\varphi\varphi}] + 2\mu_L [(\partial_\varphi \Psi_{rr}) - 2\Psi_{r\varphi}] \right], \quad (3.229)$$

$$\mu_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{r} c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr} + \Psi_{\varphi\varphi}] + 2\mu_L [(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}) + 2\Psi_{r\varphi}] \right], \quad (3.230)$$

$$\mu_{\varphi zz} = \frac{1}{r} c_1 c_3 \lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr} + \Psi_{\varphi\varphi}], \quad (3.231)$$

$$\mu_{\varphi r\varphi} = \frac{2}{r} c_1 c_3 \mu_L \left[(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}) + [\Psi_{rr} - \Psi_{\varphi\varphi}] \right]. \quad (3.232)$$

Daraus ergeben sich nach Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen die Darstellungen

$$\mu_{rrr} = c_1 c_3 \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \frac{1}{2} (k+1) \left[(\lambda_L + 2\mu_L) \Psi_{rr}^{(k)} + \lambda_L \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right], \quad (3.233)$$

$$\mu_{r\varphi\varphi} = c_1 c_3 \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \frac{1}{2} (k+1) \left[\lambda_L \Psi_{rr}^{(k)} + (\lambda_L + 2\mu_L) \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right], \quad (3.234)$$

$$\mu_{rzz} = c_1 c_3 \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \frac{1}{2} (k+1) \lambda_L \left[\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right], \quad (3.235)$$

$$\mu_{rr\varphi} = c_1 c_3 \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} (k+1) \mu_L \Psi_{r\varphi}^{(k)}, \quad (3.236)$$

$$\mu_{\varphi rr} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}] + 2\mu_L [(\partial_\varphi \Psi_{rr}^{(k)}) - 2\Psi_{r\varphi}^{(k)}] \right], \quad (3.237)$$

$$\mu_{\varphi\varphi\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}] + 2\mu_L [(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}) + 2\Psi_{r\varphi}^{(k)}] \right], \quad (3.238)$$

$$\mu_{\varphi zz} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} c_1 c_3 \lambda_L \partial_\varphi [\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}], \quad (3.239)$$

$$\mu_{\varphi r\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} 2 c_1 c_3 \mu_L \left[(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}^{(k)}) + [\Psi_{rr}^{(k)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)}] \right]. \quad (3.240)$$

Somit definieren wir die entsprechenden Hyperspannungswinkelfunktionen $\mu_{ijk}^{(k)}$ k -ter Ordnung durch

$$\mu_{rrr}^{(k)} := \frac{1}{2} c_1 c_3 (k+1) \left[\lambda_L \left(\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) + 2 \mu_L \Psi_{rr}^{(k)} \right], \quad (3.241)$$

$$\mu_{r\varphi\varphi}^{(k)} := \frac{1}{2} c_1 c_3 (k+1) \left[\lambda_L \left(\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) + 2 \mu_L \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right], \quad (3.242)$$

$$\mu_{rzz}^{(k)} := \frac{1}{2} c_1 c_3 \lambda_L (k+1) \left(\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right), \quad (3.243)$$

$$\mu_{rr\varphi}^{(k)} := c_1 c_3 (k+1) \mu_L \Psi_{r\varphi}^{(k)}, \quad (3.244)$$

$$\mu_{\varphi rr}^{(k)} := c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi \left[\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] + 2 \mu_L \left[\left(\partial_\varphi \Psi_{rr}^{(k)} \right) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right] \right], \quad (3.245)$$

$$\mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(k)} := c_1 c_3 \left[\lambda_L \partial_\varphi \left[\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] + 2 \mu_L \left[\left(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right] \right], \quad (3.246)$$

$$\mu_{\varphi zz}^{(k)} := c_1 c_3 \lambda_L \partial_\varphi \left[\Psi_{rr}^{(k)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right], \quad (3.247)$$

$$\mu_{\varphi r\varphi}^{(k)} := 2 c_1 c_3 \mu_L \left[\left(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}^{(k)} \right) + \left[\Psi_{rr}^{(k)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(k)} \right] \right]. \quad (3.248)$$

3.7.1 Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung

Bevor wir die Hyperspannungswinkelfunktionen $\mu_{ijk}^{(0)}$ nullter Ordnung bestimmen, geben wir zuerst die in den Gleichungen (3.241) – (3.248) auftretenden Terme der Summe, Differenz sowie der Ableitungen der Verläufe aus Tabelle 3.7 an:

$$\Psi_{rr}^{(0)} + \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{1}{2} B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right], \quad (3.249)$$

$$\Psi_{rr}^{(0)} - \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} = -2 C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) - 2 E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \quad (3.250)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_\varphi \Psi_{rr}^{(0)} \right) &= C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{4} B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ &\quad - E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \end{aligned} \quad (3.251)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)} \right) &= -C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{4} B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ &\quad + E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \end{aligned} \quad (3.252)$$

$$\left(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}^{(0)} \right) = C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\frac{3}{2} \sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \frac{5}{2} \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right). \quad (3.253)$$

Der hintere Ausdruck in Gleichung (3.245) beziehungsweise (3.246) lautet somit

$$\begin{aligned} (\partial_\varphi \Psi_{rr}^{(0)}) - 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} &= -\frac{1}{2} C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{4} B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right), \end{aligned} \quad (3.254)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}^{(0)}) + 2 \Psi_{r\varphi}^{(0)} &= \frac{1}{2} C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{4} B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right). \end{aligned} \quad (3.255)$$

Die Hyperspannungswinkelfunktionen $\mu_{rjk}^{(0)}$ nullter Ordnung ergeben sich also zu

$$\begin{aligned} \mu_{rrr}^{(0)} &= c_1 c_3 \left[-\mu_L C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} (\lambda_L + \mu_L) B_{\Psi,II}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \right. \\ &\quad \left. - \mu_L E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right], \end{aligned} \quad (3.256)$$

$$\begin{aligned} \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)} &= c_1 c_3 \left[\mu_L C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} (\lambda_L + \mu_L) B_{\Psi,II}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \right. \\ &\quad \left. + \mu_L E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right], \end{aligned} \quad (3.257)$$

$$\mu_{rzz}^{(0)} = \frac{1}{2} c_1 c_3 \lambda_L B_{\Psi,II}^{(0)} \sin \left[\frac{1}{2} \varphi \right], \quad (3.258)$$

$$\mu_{rr\varphi}^{(0)} = c_1 c_3 \mu_L \left[C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) - E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] - \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right], \quad (3.259)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi rr}^{(0)} &= c_1 c_3 \left[-\mu_L C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} (\lambda_L + \mu_L) B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \right. \\ &\quad \left. + \mu_L E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right], \end{aligned} \quad (3.260)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)} &= c_1 c_3 \left[\mu_L C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + \frac{1}{2} (\lambda_L + \mu_L) B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right] \right. \\ &\quad \left. - \mu_L E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right], \end{aligned} \quad (3.261)$$

$$\mu_{\varphi zz}^{(0)} = \frac{1}{2} c_1 c_3 \lambda_L B_{\Psi,II}^{(0)} \cos \left[\frac{1}{2} \varphi \right], \quad (3.262)$$

$$\mu_{\varphi r\varphi}^{(0)} = -c_1 c_3 \mu_L \left[C_{\Psi,I}^{(0)} \left(\cos \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \cos \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) + E_{\Psi,II}^{(0)} \left(\sin \left[\frac{3}{2} \varphi \right] + \sin \left[\frac{5}{2} \varphi \right] \right) \right]. \quad (3.263)$$

Tabelle 3.9.: Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung

3.7.2 Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung

Für die Verläufe aus Tabelle 3.8 gehen wir analog vor, geben aber nur die folgenden Ableitungen an:

$$(\partial_\varphi \Psi_{rr}^{(1)}) = -\frac{1}{2} A_{\Psi,I}^{(1)} \sin \varphi + D_{\Psi,I}^{(1)} (\sin \varphi + 3 \sin [3 \varphi]) - E_{\Psi,II}^{(1)} \cos \varphi - 3 F_{\Psi,II}^{(1)} \cos [3 \varphi] , \quad (3.264)$$

$$(\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}^{(1)}) = -\frac{1}{2} A_{\Psi,I}^{(1)} \sin \varphi - D_{\Psi,I}^{(1)} (\sin \varphi + 3 \sin [3 \varphi]) + E_{\Psi,II}^{(1)} \cos \varphi + 3 F_{\Psi,II}^{(1)} \cos [3 \varphi] , \quad (3.265)$$

$$(\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}^{(1)}) = D_{\Psi,I}^{(1)} (\cos \varphi + 3 \cos [3 \varphi]) + E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi + 3 F_{\Psi,II}^{(1)} \sin [3 \varphi] . \quad (3.266)$$

Die entsprechenden Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung $\mu_{rjk}^{(1)}$ lauten somit

$$\mu_{rrr}^{(1)} = c_1 c_3 \left[(\lambda_L + \mu_L) A_{\Psi,I}^{(1)} \cos \varphi - 2 \mu_L D_{\Psi,I}^{(1)} (\cos \varphi + \cos [3 \varphi]) - 2 \mu_L E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi - 2 \mu_L F_{\Psi,II}^{(1)} \sin [3 \varphi] \right] , \quad (3.267)$$

$$\mu_{r\varphi\varphi}^{(1)} = c_1 c_3 \left[(\lambda_L + \mu_L) A_{\Psi,I}^{(1)} \cos \varphi + 2 \mu_L D_{\Psi,I}^{(1)} (\cos \varphi + \cos [3 \varphi]) + 2 \mu_L E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi + 2 \mu_L F_{\Psi,II}^{(1)} \sin [3 \varphi] \right] , \quad (3.268)$$

$$\mu_{rzz}^{(1)} = c_1 c_3 \lambda_L A_{\Psi,I}^{(1)} \cos \varphi , \quad (3.269)$$

$$\mu_{rr\varphi}^{(1)} = 2 c_1 c_3 \mu_L \left[D_{\Psi,I}^{(1)} (\sin \varphi + \sin [3 \varphi]) - E_{\Psi,II}^{(1)} \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) + F_{\Psi,II}^{(1)} \left(\frac{1}{2} - \cos [3 \varphi] \right) \right] , \quad (3.270)$$

$$\mu_{\varphi rr}^{(1)} = c_1 c_3 \left[-(\lambda_L + \mu_L) A_{\Psi,I}^{(1)} \sin \varphi - 2 \mu_L D_{\Psi,I}^{(1)} (\sin \varphi - \sin [3 \varphi]) + 2 \mu_L E_{\Psi,II}^{(1)} (1 + \cos \varphi) - 2 \mu_L F_{\Psi,II}^{(1)} (1 + \cos [3 \varphi]) \right] , \quad (3.271)$$

$$\mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(1)} = c_1 c_3 \left[-(\lambda_L + \mu_L) A_{\Psi,I}^{(1)} \sin \varphi + 2 \mu_L D_{\Psi,I}^{(1)} (\sin \varphi - \sin [3 \varphi]) - 2 \mu_L E_{\Psi,II}^{(1)} (1 + \cos \varphi) + 2 \mu_L F_{\Psi,II}^{(1)} (1 + \cos [3 \varphi]) \right] , \quad (3.272)$$

$$\mu_{\varphi zz}^{(1)} = -c_1 c_3 \lambda_L A_{\Psi,I}^{(1)} \sin \varphi , \quad (3.273)$$

$$\mu_{\varphi r\varphi}^{(1)} = -2 c_1 c_3 \mu_L \left[D_{\Psi,I}^{(1)} (\cos \varphi - \cos [3 \varphi]) + E_{\Psi,II}^{(1)} \sin \varphi - F_{\Psi,II}^{(1)} \sin [3 \varphi] \right] . \quad (3.274)$$

Tabelle 3.10.: Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung

3.8 Alternative und äquivalente Bestimmung der Rissspitzennahfelder

Wir haben die CAUCHYSche Spannung Σ aus den entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Weiter haben wir die nicht-klassische Mikrodehnung Ψ aus der HELMHOLTZ-Gleichung gewonnen und diese anschließend verwendet, um die Hyperspannung μ zu bestimmen. Da die bisher angegebene Herangehensweise der analytischen Diskussion sehr aufwändig und fehleranfällig ist, verwenden wir zusätzlich einen alternativen und äquivalenten Lösungsweg zur Verifizierung der bisher gewonnenen Rissspitzennahfelder. Die Hyperspannung μ lässt sich auch direkt aus Gleichgewichtsbedingung (2.51)₂ bestimmen, um anschließend daraus die Mikrodehnung Ψ zu gewinnen. Es ist bei diesem Lösungsweg auch nötig, die Felder durch einen Potenzreihenansatz nach WILLIAMS [41] zu approximieren. Wenn wir wiederum davon ausgehen, dass die führende Potenz der Freiheitsgrade $p = \frac{1}{2}$ ist, so wählen wir für die Hyperspannung μ und die relative Spannung τ die folgenden Ansätze:

$$\tau_{jk}(r, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \tau_{jk}^{(s)}(\varphi), \quad \mu_{ijk}(r, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} r^{\frac{1}{2}(s-1)} \mu_{ijk}^{(s)}(\varphi). \quad (3.275)$$

Wir erkennen eine analoge Situation wie bei der HELMHOLTZ-Gleichung: Erst ab der zweiten Ordnung tritt eine Kopplung der Hyperspannung μ mit der relativen Spannung τ auf, da die Hyperspannung μ und die relative Spannung τ in Gleichgewichtsbedingung (2.51)₂ unterschiedliche Ableitungsordnungen besitzen. Das bedeutet, dass die Differentialgleichungssysteme der beiden führenden Ordnungen nur in den Winkelfunktionen der Hyperspannung μ formuliert sein werden. Die physikalischen Komponenten der Divergenz der Hyperspannung μ entnehmen wir Tabelle A.7 aus Kapitel A.8 und erhalten

$$0 = (\nabla \cdot \mu)_{rr} + \tau_{rr} = (\partial_r \mu_{rrr}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi rr}) + \frac{1}{r} (\mu_{rrr} - \mu_{\varphi \varphi r} - \mu_{\varphi r \varphi}) + \tau_{rr}, \quad (3.276)$$

$$0 = (\nabla \cdot \mu)_{\varphi \varphi} + \tau_{\varphi \varphi} = (\partial_r \mu_{r \varphi \varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi \varphi \varphi}) + \frac{1}{r} (\mu_{r \varphi \varphi} + \mu_{\varphi r \varphi} + \mu_{\varphi \varphi r}) + \tau_{\varphi \varphi}, \quad (3.277)$$

$$0 = (\nabla \cdot \mu)_{r \varphi} + \tau_{r \varphi} = (\partial_r \mu_{rr \varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi r \varphi}) + \frac{1}{r} (\mu_{rr \varphi} - \mu_{\varphi \varphi \varphi} + \mu_{\varphi r r}) + \tau_{r \varphi}, \quad (3.278)$$

$$0 = (\nabla \cdot \mu)_{zz} + \tau_{zz} = (\partial_r \mu_{rzz}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi zz}) + \frac{1}{r} \mu_{rzz} + \tau_{zz}. \quad (3.279)$$

Dieses Gleichungssystem ergibt ein, wie wir noch sehen werden, unterbestimmtes Gleichungssystem aus vier Gleichungen für sieben unbekannte Winkelfunktionen. Die fehlenden Gleichungen werden durch folgende Überlegung ermittelt: Die zweiten Ableitungen der Mikrodehnungen Ψ_{ij} müssen kommutieren:

$$\partial_r [\partial_\varphi \Psi_{ij}] = \partial_\varphi [\partial_r \Psi_{ij}] \iff 0 = \partial_r [\partial_\varphi \Psi_{ij}] - \partial_\varphi [\partial_r \Psi_{ij}]. \quad (3.280)$$

Die ersten partiellen Ableitungen $\partial_i \Psi_{jk}$ der Mikrodehnungen Ψ_{ij} lassen sich durch die in Tabelle A.1 in Kapitel A.2 angegebenen Komponenten $(\nabla \Psi)_{ijk}$ des Gradienten $\nabla \Psi$ der Mikrodehnung Ψ ausdrücken.

Die Bedingung (3.280) für die physikalischen Komponenten $\Psi_{rr}, \Psi_{\varphi\varphi}$ beziehungsweise $\Psi_{r\varphi}$ können wir durch Gleichung (A.32), (A.33) beziehungsweise (A.36) folgendermaßen ausdrücken:

$$0 = \partial_\varphi [\partial_r \Psi_{rr}] - \partial_r [\partial_\varphi \Psi_{rr}] = \partial_\varphi [(\nabla \Psi)_{rrr}] - \partial_r [r (\nabla \Psi)_{\varphi rr}] - 2 (\nabla \Psi)_{rr\varphi} , \quad (3.281)$$

$$0 = \partial_\varphi [\partial_r \Psi_{\varphi\varphi}] - \partial_r [\partial_\varphi \Psi_{\varphi\varphi}] = \partial_\varphi [(\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi}] - \partial_r [r (\nabla \Psi)_{\varphi\varphi\varphi}] - 2 (\nabla \Psi)_{rr\varphi} , \quad (3.282)$$

$$0 = \partial_\varphi [\partial_r \Psi_{r\varphi}] - \partial_r [\partial_\varphi \Psi_{r\varphi}] = \partial_\varphi [(\nabla \Psi)_{rr\varphi}] - \partial_r [r (\nabla \Psi)_{\varphi r\varphi}] - (\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi} + (\nabla \Psi)_{rrr} . \quad (3.283)$$

Die drei fehlenden Gleichungen zur Bestimmung der physikalischen Komponenten μ_{ijk} ergeben sich durch Einsetzen des invertierten Materialgesetzes (2.71)₃:

$$\nabla \Psi = \frac{1}{c_1 c_3} \mu : \mathbb{C}^{-1} , \quad \mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{2\mu_L} \left[\mathbf{1}_s - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] . \quad (3.284)$$

Somit ergeben sich die folgenden physikalischen Komponenten von $\nabla \Psi$:

$$(\nabla \Psi)_{ijk} = \frac{1}{2\mu_L c_1 c_3} \left[\mu_{ijk} - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} \mu_{imm} \delta_{jk} \right] . \quad (3.285)$$

Die in den Gleichungen (3.281) – (3.283) auftretenden physikalischen Komponenten lauten:

$$(\nabla \Psi)_{rrr} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \left[\mu_{rrr} - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} (\mu_{rrr} + \mu_{r\varphi\varphi} + \mu_{rzzz}) \right] , \quad (3.286)$$

$$(\nabla \Psi)_{r\varphi\varphi} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \left[\mu_{r\varphi\varphi} - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} (\mu_{rrr} + \mu_{r\varphi\varphi} + \mu_{rzzz}) \right] , \quad (3.287)$$

$$(\nabla \Psi)_{rr\varphi} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \mu_{rr\varphi} , \quad (3.288)$$

$$(\nabla \Psi)_{\varphi rr} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \left[\mu_{\varphi rr} - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} (\mu_{\varphi rr} + \mu_{\varphi\varphi\varphi} + \mu_{\varphi zzz}) \right] , \quad (3.289)$$

$$(\nabla \Psi)_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \left[\mu_{\varphi\varphi\varphi} - \frac{\lambda_L}{3\lambda_L + 2\mu_L} (\mu_{\varphi rr} + \mu_{\varphi\varphi\varphi} + \mu_{\varphi zzz}) \right] , \quad (3.290)$$

$$(\nabla \Psi)_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} \mu_{\varphi r\varphi} . \quad (3.291)$$

Weiter können wir die physikalischen Komponenten μ_{izz} durch folgende Überlegung eliminieren:

$$0 = (\nabla \Psi)_{izz} \implies \mu_{izz} = \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + \mu_L)} (\mu_{irr} + \mu_{i\varphi\varphi}) . \quad (3.292)$$

Setzen wir die Gleichungen (3.286) – (3.292) in die Gleichungen (3.281) – (3.283) ein, so erhalten wir die folgenden drei Differentialgleichungen:

$$0 = (\partial_\varphi \mu_{rrr}) - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} (\partial_\varphi \mu_{r\varphi\varphi}) - r (\partial_r \mu_{\varphi rr}) + r \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} (\partial_r \mu_{\varphi\varphi\varphi}) - \mu_{\varphi rr} \\ + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \mu_{\varphi\varphi\varphi} - \frac{4(\lambda_L + \mu_L)}{\lambda_L + 2\mu_L} \mu_{rr\varphi} , \quad (3.293)$$

$$0 = (\partial_\varphi \mu_{r\varphi\varphi}) - \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} (\partial_\varphi \mu_{rrr}) - r (\partial_r \mu_{\varphi\varphi\varphi}) + r \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} (\partial_r \mu_{\varphi rr}) - \mu_{\varphi\varphi\varphi} \\ + \frac{\lambda_L}{\lambda_L + 2\mu_L} \mu_{\varphi rr} - \frac{4(\lambda_L + \mu_L)}{\lambda_L + 2\mu_L} \mu_{rr\varphi} , \quad (3.294)$$

$$0 = (\partial_\varphi \mu_{rr\varphi}) - r (\partial_r \mu_{\varphi r\varphi}) + \mu_{rrr} - \mu_{r\varphi\varphi} - \mu_{\varphi r\varphi} . \quad (3.295)$$

Verwenden wir nun den asymptotischen Ansatz (3.275) für die Hyperspannung μ einerseits in den Gleichgewichtsbedingungen (3.276) – (3.279) und andererseits in den Gleichungen (3.286) – (3.291), so folgt nach längeren Umrechnungen für die Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung $\mu_{ijk}^{(0)}$:

$$0 = \mu_{rrr}^{(0)} + 2 (\partial_\varphi \mu_{\varphi rr}^{(0)}) - 4 \mu_{\varphi r\varphi}^{(0)} , \quad (3.296)$$

$$0 = \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)} + 2 (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}) + 4 \mu_{\varphi r\varphi}^{(0)} , \quad (3.297)$$

$$0 = \mu_{rr\varphi}^{(0)} + 2 (\partial_\varphi \mu_{\varphi r\varphi}^{(0)}) - 2 \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)} + 2 \mu_{\varphi rr}^{(0)} , \quad (3.298)$$

$$0 = \mu_{rrr}^{(0)} + \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)} + 2 (\partial_\varphi \mu_{\varphi rr}^{(0)}) + 2 (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}) , \quad (3.299)$$

$$0 = 2 (\partial_\varphi \mu_{r\varphi r}^{(0)}) - \mu_{\varphi r\varphi}^{(0)} + 2 \mu_{rrr}^{(0)} - 2 \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)} , \quad (3.300)$$

$$0 = 2 (\partial_\varphi \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)}) + 2 (\partial_\varphi \mu_{rrr}^{(0)}) - \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)} - \mu_{\varphi rr}^{(0)} , \quad (3.301)$$

$$0 = 2 (\partial_\varphi \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)}) - 2 (\partial_\varphi \mu_{rrr}^{(0)}) - \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)} + \mu_{\varphi rr}^{(0)} + 8 \mu_{rr\varphi}^{(0)} . \quad (3.302)$$

Wir gewinnen ein Gleichungssystem für die beiden Winkelfunktionen $\mu_{\varphi rr}^{(0)}$ und $\mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}$, indem wir jeweils die Winkelfunktionen $\mu_{rrr}^{(0)}, \mu_{r\varphi\varphi}^{(0)}, \mu_{\varphi r\varphi}^{(0)}$ beziehungsweise $\mu_{r\varphi r}^{(0)}$ durch die Gleichungen (3.296), (3.297), (3.300) beziehungsweise Gleichung (3.302) eliminieren. Dieses Gleichungssystem lässt sich auf eine einzelne Differentialgleichung für die Winkelfunktion $\mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}$ reduzieren, deren Lösung wir dann sukzessive nutzen können, um die anderen Winkelfunktionen zu bestimmen:

$$(\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}) + \frac{17}{2} (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)}) + \frac{225}{16} \mu_{\varphi\varphi\varphi}^{(0)} = 6A \cos \frac{\varphi}{2} . \quad (3.303)$$

Der Aufbau dieser inhomogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist analog zu Gleichung (3.157) und führt auf die gleichen Lösungen der Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung $\mu_{ijk}^{(0)}$ und Mikrodehnungen $\Psi_{ij}^{(0)}$, wie wir sie in Kapitel 3.7 und in Kapitel 3.6 angegeben haben. Auf eine Skizzierung der Bestimmung der Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung auf diesem alternativen und äquivalenten Weg verzichten wir an dieser Stelle, da diese ebenfalls zu den bereits angegebenen Ergebnissen führt.

3.9 Spannungsintensitätsfaktoren

Die nach einer asymptotischen Entwicklung unbestimmt bleibenden Integrationskonstanten haben bei linearen Elastizitätstheorien einen direkten Bezug zu den sogenannten Spannungsintensitätsfaktoren. In Anlehnung an die asymptotische Entwicklung ergibt es Sinn, einen Grenzwert $r \rightarrow 0$ zu betrachten. Im Rahmen der linearen Elastizität ergibt sich für Modus I, II mit $\alpha \in \{I, II\}$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \Sigma_{ij}] = K_\alpha f_{ij}^\alpha(\varphi) . \quad (3.304)$$

Die Winkelfunktionen f_{ij}^α spielen hierbei eine zentrale Rolle. Diese Grenzwertbetrachtung in Richtung der Risspitze wird klassischerweise durch folgende Bedingungen normiert:

$$f_{\varphi\varphi}^I(\varphi = 0) \equiv 1 , \quad f_{r\varphi}^{II}(\varphi = 0) \equiv 1 . \quad (3.305)$$

Die klassischen Verläufe der Spannungen (siehe GROSS [19]) motivieren die Grenzwertbetrachtung der für den entsprechenden Modus charakteristischen Spannung zur Definition der klassischen Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} . Modus I wird durch die Umfangsspannung $\Sigma_{\varphi\varphi}$ und Modus II durch die Schubspannung $\Sigma_{r\varphi}$ charakterisiert, daher ergeben sich folgende Definitionen:

$$K_I := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \Sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = 0)] , \quad K_{II} := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \Sigma_{r\varphi}(r, \varphi = 0)] . \quad (3.306)$$

Die Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} bestimmen sich also aus den Vorfaktoren der führenden Terme einer asymptotischen Entwicklung. Um in unserem Fall verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren zu definieren, stellen wir eine ähnliche Überlegung an und nutzen die Normierung (3.305) weiter. Die folgenden beiden Grenzwerte definieren verallgemeinerte Spannungsintensitätsfaktoren \tilde{K}_I beziehungsweise \tilde{K}_{II} des Modus I beziehungsweise II:

$$\tilde{K}_I := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \Sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = 0)] \stackrel{(3.126)}{=} \sqrt{2\pi} \Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi = 0) , \quad (3.307)$$

$$\tilde{K}_{II} := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \Sigma_{r\varphi}(r, \varphi = 0)] \stackrel{(3.127)}{=} \sqrt{2\pi} \Sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi = 0) . \quad (3.308)$$

Wir nutzen also die gleiche Form wie die klassischen Spannungsintensitätsfaktoren, jedoch mit einer nicht-klassischen CAUCHYSchen Spannung Σ . Einsetzen der Winkelfunktion $\Sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ aus Gleichung (3.126) sowie der Winkelfunktion $\Sigma_{r\varphi}^{(0)}$ aus Gleichung (3.127) liefert die Spannungsintensitätsfaktoren

$$\tilde{K}_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_{\Sigma,I}^{(0)} , \quad \tilde{K}_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} B_{\Sigma,II}^{(0)} . \quad (3.309)$$

Im Gegensatz zu anderen erweiterten Theorien (siehe zum Beispiel ELSÄSSER [10]), sind diese von den Materialparametern unabhängig und entsprechen vollkommen der klassischen linearen Bruchmechanik.

3.10 Hyperspannungsintensitätsfaktoren

Wir definieren für Modus I den Intensitätsfaktor \tilde{L}_I analog dem Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_I . Daher betrachten wir den folgenden Grenzwert mit einer zu Gleichung (3.305) analogen Normierung:

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \mu_{ijk}] = \tilde{L}_I g_{ijk}^I(\varphi), \quad g_{\varphi r \varphi}^I(\varphi = 0) \equiv 1. \quad (3.310)$$

Somit erhalten wir die Definition des Hyperspannungsintensitätsfaktors \tilde{L}_I ,

$$\tilde{L}_I := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \mu_{\varphi r \varphi}(\varphi = 0)] = \sqrt{2\pi} \mu_{\varphi r \varphi}^{(0)}(\varphi = 0) = -2\sqrt{2\pi} c_1 c_3 \mu_L C_{\Psi, I}^{(0)}. \quad (3.311)$$

Für Modus II ist die Situation komplexer. In der klassischen Bruchmechanik gewinnen wir auch für eine Modus- II -Belastung nur einen Intensitätsfaktor. Die Hyperspannungswinkelfunktionen nullter Ordnung in Tabelle 3.9 enthalten allerdings noch zwei unbestimmte Integrationskonstanten $B_{\Psi, II}^{(0)}$ und $E_{\Psi, II}^{(0)}$. Daher betrachten wir für Modus II die additive Darstellung

$$\lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \mu_{ijk}] = \tilde{L}_{II}^{(+)} (g_{ijk}^{II})^{(+)} + \tilde{L}_{II}^{(-)} (g_{ijk}^{II})^{(-)} \quad (3.312)$$

zusammen mit den beiden Normierungen

$$(g_{\varphi rr}^{II})^{(+)}(\varphi = 0) = (g_{\varphi rr}^{II})^{(-)}(\varphi = 0) \equiv 1. \quad (3.313)$$

Um die beiden verbleibenden Integrationskonstanten zu separieren, müssen wir die Summe beziehungsweise Differenz der zwei Hyperspannungen $\mu_{\varphi rr}$ und $\mu_{\varphi \varphi \varphi}$ betrachten. Wir kennzeichnen die daraus resultierenden Hyperspannungsintensitätsfaktoren mit dem Symbol (+) beziehungsweise (−):

$$\tilde{L}_{II}^{(+)} := \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi} (\mu_{\varphi rr} + \mu_{\varphi \varphi \varphi})(\varphi = 0)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\mu_{\varphi rr}^{(0)} + \mu_{\varphi \varphi \varphi}^{(0)}](\varphi = 0), \quad (3.314)$$

$$\tilde{L}_{II}^{(-)} := \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi} (\mu_{\varphi rr} - \mu_{\varphi \varphi \varphi})(\varphi = 0)] = \sqrt{2\pi} [\mu_{\varphi rr}^{(0)} - \mu_{\varphi \varphi \varphi}^{(0)}](\varphi = 0). \quad (3.315)$$

Die Koeffizienten $\tilde{L}_{II}^{(\pm)}$ erhalten wir mit Hilfe der Verläufe aus Tabelle 3.9:

$$\tilde{L}_{II}^{(+)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} c_1 c_3 (\lambda_L + \mu_L) B_{\Psi, II}^{(0)}, \quad (3.316)$$

$$\tilde{L}_{II}^{(-)} = 2\sqrt{2\pi} c_1 c_3 \mu_L E_{\Psi, II}^{(0)}. \quad (3.317)$$

Auch für die Hyperspannungswinkelfunktionen erster Ordnung ist die Situation komplexer als in der klassischen linearen Bruchmechanik. Wir normieren wieder entsprechend und definieren:

$$\tilde{l}_I^{(+)} := \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r}{2} (\mu_{rrr} + \mu_{r\varphi\varphi}) (\varphi = 0) \right] = c_1 c_3 (\lambda_L + \mu_L) A_{\Psi,I}^{(1)}, \quad (3.318)$$

$$\tilde{l}_I^{(-)} := \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r}{2} (\mu_{rrr} - \mu_{r\varphi\varphi}) (\varphi = 0) \right] = -2 c_1 c_3 \mu_L D_{\Psi,I}^{(1)}, \quad (3.319)$$

$$\tilde{l}_{II}^{(+)} := \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r}{2} (\mu_{\varphi rr} + \mu_{\varphi\varphi\varphi}) (\varphi = 0) \right] = -2 c_1 c_3 \mu_L E_{\Psi,II}^{(1)}, \quad (3.320)$$

$$\tilde{l}_{II}^{(-)} := \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{r}{2} (\mu_{\varphi rr} - \mu_{\varphi\varphi\varphi}) (\varphi = 0) \right] = -2 c_1 c_3 \mu_L F_{\Psi,II}^{(1)}. \quad (3.321)$$

3.11 Zusammenfassung

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Lösungen der Differentialgleichungssysteme verschiedener Ordnung noch zusammenführen und die Gesamtverläufe der wichtigsten Größen der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie angeben. Wir beginnen mit der CAUCHYSchen Spannung Σ . Die Winkelfunktionen nullter und erster Ordnung, die in den beiden Tabellen 3.5 und 3.6 angegebenen sind, entsprechen den aus der klassischen Elastizität bekannten Verläufen. Vergleiche hierzu die Arbeiten von HELLAN [22] sowie KIM UND PAULINO [27]. Das bedeutet insbesondere, dass obwohl wir eine verallgemeinerte CAUCHYSche Spannung Σ verwenden, alle in der Literatur bekannten Eigenschaften der Spannungsverläufe trotzdem weiterhin gelten! Setzen wir die Winkelfunktionen aus Abschnitt (3.5) zusammen mit den Spannungsintensitätsfaktoren aus Abschnitt 3.9 in den Potenzreihenansatz (3.35)₁ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Sigma_{rr} \\ \Sigma_{\varphi\varphi} \\ \Sigma_{r\varphi} \end{bmatrix} &= \frac{\tilde{K}_I}{4\sqrt{2}\pi r} \begin{bmatrix} 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos(\frac{3}{2}\varphi) \\ 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos(\frac{3}{2}\varphi) \\ \sin \frac{\varphi}{2} + \sin(\frac{3}{2}\varphi) \end{bmatrix} + \frac{\tilde{K}_{II}}{4\sqrt{2}\pi r} \begin{bmatrix} -5 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin(\frac{3}{2}\varphi) \\ -3 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin(\frac{3}{2}\varphi) \\ \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos(\frac{3}{2}\varphi) \end{bmatrix} \\ &+ \tilde{k}_I \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.322)$$

Tabelle 3.11.: Spannungen des Nahfeldes der Risspitze für Modus I und Modus II

Die Spannungskoeffizienten \tilde{K}_I, \tilde{k}_I beziehungsweise \tilde{K}_{II} charakterisieren bei einer sogenannten „mixed-mode-Belastung“ den jeweiligen Einfluss des Modus I beziehungsweise des Modus II .

Als weitere Lösung haben wir die Winkelfunktionen nullter und erster Ordnung der Mikrodehnungen Ψ_{ij} gewonnen, die in den Tabellen 3.7 und 3.8 angegeben sind. Die unterschiedlichen Anteile dieses nicht-klassischen Feldes lassen sich zwar ebenfalls in Modus-*I*– sowie Modus-*II*–Anteile zerlegen, es existieren jedoch für die Terme nullter Ordnung drei Koeffizienten \tilde{L}_I , $\tilde{L}_{II}^{(+)}$ und $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ die den Intensitätsfaktoren für die Hyperspannung μ entsprechen. Für die Terme erster Ordnung existieren sogar vier Koeffizienten \tilde{l}_I^α und $\tilde{l}_{II}^{(\pm)}$, die den Termen erster Ordnung der Hyperspannung μ zuzordnen sind (vergleiche Tabelle 3.13). Zusätzlich zu den in der folgenden Tabelle aufgeführten sieben verschiedenen Koeffizienten existieren für die Mikrodehnungen Ψ_{ij} konstante Anteile, die für derartige Modelle neu sind. Allerdings bleiben die Mikrodehnungen Ψ_{ij} regulär. Die Winkelfunktionen aus Abschnitt (3.6) in Kombination mit den Koeffizienten aus Abschnitt 3.10 ergeben für den Potenzreihenansatz (3.35)₂ die in der folgenden Tabelle zusammengefassten Verläufe.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Psi_{rr} - \bar{\Psi}_{rr} \\ \Psi_{\varphi\varphi} - \bar{\Psi}_{\varphi\varphi} \\ \Psi_{r\varphi} - \bar{\Psi}_{r\varphi} \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{L}_I}{2c_1 c_3 \mu_L} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} \\
&+ \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{2c_1 c_3 \mu_L} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} \\
&+ \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{L}_{II}^{(+)}}{c_1 c_3 (\lambda_L + \mu_L)} \begin{bmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\tilde{l}_I^{(+)} r}{2c_1 c_3 (\lambda_L + \mu_L)} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\tilde{l}_I^{(-)} r}{2c_1 c_3 \mu_L} \begin{bmatrix} \cos\varphi + \cos(3\varphi) \\ -\cos\varphi - \cos(3\varphi) \\ -\sin\varphi - \sin(3\varphi) \end{bmatrix} + \frac{\tilde{l}_{II}^{(+)} r}{2c_1 c_3 \mu_L} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\sin\varphi \\ \frac{1}{2} + \cos\varphi \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\tilde{l}_{II}^{(-)} r}{2c_1 c_3 \mu_L} \begin{bmatrix} \sin(3\varphi) \\ -\sin(3\varphi) \\ -\frac{1}{2} + \cos(3\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r^3}) \\ O(\sqrt{r^3}) \\ O(\sqrt{r^3}) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.323}$$

Tabelle 3.12.: Mikrodehnungen des Nahfeldes der Rissspitze für Modus *I* und Modus *II*

Aus der Mikrodehnung Ψ haben wir anschließend durch Bildung des Gradienten die Hyperspannung μ gewonnen, die analog zu der CAUCHYSchen Spannung Σ eine $\frac{1}{\sqrt{r}}$ -Singularität aufweist. Im Gegensatz zu mikropolaren Theorien, wie sie beispielsweise in ELSÄSSER [10] untersucht wurde, sind sogar beide Modi singulär. Die Winkelfunktionen nullter Ordnung besitzen eine komplexere Struktur als bei mikropolaren Theorien, die lediglich eine Abhängigkeit der Sinus- oder Kosinusfunktion des halben Winkels aufweisen. Einen weiteren Unterschied zu mikropolaren Theorien erkennen wir in den Termen erster Ordnung, die sogenannten konstanten Terme. So gibt es konstante Terme in der mikropolaren Theorie nur für Modus II , wohingegen das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Modell eine Hyperspannung μ mit konstanten Termen sowohl für Modus I als auch für Modus II beinhaltet. Weiter existieren für beide Modi jeweils zwei Koeffizienten in den konstanten Termen. Deren zugehörige Winkelfunktionen erster Ordnung weisen auch eine komplexere Struktur als bei mikropolaren Theorien auf, bei denen diese nur aus einem einzigen Sinus- beziehungsweise Kosinusterm bestehen. Setzen wir die in den Tabellen 3.9 und 3.10 angegebenen Winkelfunktionen in den entsprechenden Potenzreihenansatz aus Gleichung (3.216) ein, so erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengefassten Verläufe.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mu_{rrr} \\ \mu_{r\varphi\varphi} \\ \mu_{rr\varphi} \\ \mu_{\varphi rr} \\ \mu_{\varphi\varphi\varphi} \\ \mu_{\varphi r\varphi} \end{bmatrix} &= \frac{\tilde{L}_I}{2\sqrt{2}\pi r} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} + \frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{2\sqrt{2}\pi r} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \cos\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} \\
&+ \frac{\tilde{L}_{II}^{(+)}}{\sqrt{2}\pi r} \begin{bmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ \cos\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{l}_I^{(+)} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \\ -\sin\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{l}_I^{(-)} \begin{bmatrix} \cos\varphi + \cos(3\varphi) \\ -\cos\varphi - \cos(3\varphi) \\ -\sin\varphi - \sin(3\varphi) \\ \sin\varphi - \sin(3\varphi) \\ -\sin\varphi + \sin(3\varphi) \\ \cos\varphi - \cos(3\varphi) \end{bmatrix} \\
&+ \tilde{l}_{II}^{(+)} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\sin\varphi \\ \frac{1}{2} + \cos\varphi \\ -1 - \cos\varphi \\ 1 + \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} + \tilde{l}_{II}^{(-)} \begin{bmatrix} \sin(3\varphi) \\ -\sin(3\varphi) \\ -\frac{1}{2} + \cos(3\varphi) \\ 1 + \cos(3\varphi) \\ -1 - \cos(3\varphi) \\ -\sin(3\varphi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.324}$$

Tabelle 3.13.: Hyperspannungen des Nahfeldes der Risspitze für Modus I und Modus II

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir noch die aus den CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} sowie den Mikrodehnungen Ψ_{ij} bestimmbaren Dehnungen ε_{ij} an. Aus diesen gewinnen wir durch Inversion der Kinematik weiter die Verschiebungen u_i vollkommen analog zur klassischen linearen Bruchmechanik:

$$u_r = \int \varepsilon_{rr} dr, \quad u_\varphi = \int [u_r + r \varepsilon_{\varphi\varphi}] d\varphi. \quad (3.325)$$

Die entsprechenden Verläufe haben wir in der letzten Tabelle dieses Kapitels zusammengefasst.

Dehnungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{bmatrix} &= \frac{c_1 \tilde{K}_I}{2 \sqrt{2} \pi r c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ (3-8\nu) \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ \sin \frac{\varphi}{2} + \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{c_1 \tilde{K}_{II}}{2 \sqrt{2} \pi r c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ (3-8\nu) \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ -\cos \frac{\varphi}{2} - 3 \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} + \frac{c_1 \tilde{k}_I}{2 c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ \sin^2 \varphi \\ -\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.326)$$

Verschiebungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{c_1 \tilde{K}_I}{2 c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ 16(1-2\nu) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{4}{3} \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \end{bmatrix} \\ &\quad - \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{c_1 \tilde{K}_{II}}{2 c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} (5-8\nu) \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ -16(1-2\nu) \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} + \frac{c_1 \tilde{k}_I r}{2 c_2 \mu_L} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \\ \varphi \end{bmatrix} \\ &\quad + [O(\sqrt{r^3})]. \end{aligned} \quad (3.327)$$

Tabelle 3.14.: Dehnungen und Verschiebungen des Nahfeldes der Risspitze für Modus *I* und Modus *II*



4 Numerische Diskussion von Rissspitzenfeldern

Das Hauptziel dieses Kapitels ist einige Probleme mit unterschiedlichen Risskonfigurationen mittels der Finite-Elemente-Methode zu berechnen und zu analysieren. Zu Beginn wird die Implementierung des Modells in einem Finite-Elemente-Code skizziert. Als erstes Problem diskutieren wir dann eine gelochte Platte unter Zugbelastung. Dieses klassische Problem ist in der Literatur gut untersucht und verstanden und wir können daher ein erstes Mal die Güte des implementierten Finite-Elemente-Codes überprüfen. Ein Vergleich mit den in der Literatur bekannten Ergebnissen erlaubt uns zusätzlich, einen Eindruck des Einflusses der verschiedenen Materialparameter auf das Verhalten der Lösungen zu gewinnen. Das zweite Problem bezieht sich auf einen Riss in einem homogenen elastischen Material unter entweder einer reinen Modus- I - oder unter einer reinen Modus- II -Belastung. Einerseits können wir durch einen Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytisch gewonnenen Verläufen die Güte der Finite-Elemente-Modellierung weiter verifizieren. Andererseits ermöglichen sie die Bestimmung der analytisch nicht bestimmbaren Intensitätsfaktoren für die CAUCHYSche Spannung Σ und die Hyperspannung μ . Der Einfluss der Materialeigenschaften auf die Nahfelder kann insbesondere durch Parameterstudien untersucht werden.

Darüber hinaus wird ein weiteres Beispiel mit einem Riss in einem Zweistoffverbund diskutiert. Der Riss ist parallel zur Trennschicht der beiden Materialien und wird einer Zugbelastung senkrecht zur Trennschicht unterworfen. Unter anderem wird der Einfluss des Abstandes des Risses zur Trennschicht sowie der Einfluss der Materialparameter auf die Intensitätsfaktoren diskutiert. Das besondere in diesem Beispiel ist, dass eine charakteristische Strukturlänge mit einbezogen wird, die vergleichbar zu inneren Materiallängen sein kann. Daher ist der Vergleich mit Ergebnissen der klassischen linearen Bruchmechanik von Interesse.

4.1 Herleitung der Grundgleichungen der Finite-Elemente-Methode

Das Modell, das wir in Tabelle 2.1 zusammengefasst haben, bildet die Basis der starken Formulierung eines Randwertproblems. Um ein vollständiges Randwertproblem zu erhalten, müssen wir noch zu den Gleichgewichtsbedingungen passende Randbedingungen formulieren. Ein solches Randwertproblem in der starken Formulierung ist im Allgemeinen nicht mehr analytisch untersuchbar. Einzig für einfache Standardbeispiele ist dies möglich. Daher leiten wir in diesem Abschnitt die grundlegenden Gleichungen der numerischen Modellierung des Randwertproblems mittels der Finite-Elemente-Methode her.

Oft wird die starke Formulierung des Randwertproblems in eine variationelle Formulierung transformiert oder direkt ein entsprechendes variationelles Prinzip wie beispielsweise das Prinzip der virtuellen Arbeit betrachtet. An die Lösungsfelder einer schwachen Formulierung werden geringere Differenzierbarkeitsanforderungen gestellt. Eine gängige Lösungsstrategie einer schwachen Formulierung eines Randwertproblems stellt die sogenannte **Finite-Elemente-Methode** dar. Dieses Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung nutzt das Lösungskonzept „Divide & conquer“: Wir unterteilen das Lösungsgebiet in disjunkte, abgeschlossene Teilgebiete, die finiten Elemente, die das Lösungsgebiet approximieren. Für jedes finite Element wird dann die Elementsteifigkeit sowie der Elementlastvektor aufgestellt und in ein Gesamtgleichungssystem assembliert.

Eine numerische Untersuchung mittels der Finite-Elemente-Methode beinhaltet schematisch folgende vier Schritte (siehe auch ZIENKIEWICZ [43], [44], HUGHES [25], BATHE [6] oder WRIGGERS [42]):

1. Aufstellen der Variationsformulierung des Gleichungssystems,
2. Linearisieren der Variationsformulierung,
3. Diskretisieren des Integrationsgebietes,
4. Assemblieren der Elementgleichungssysteme in ein Gesamtgleichungssystem.

Da die in dieser Arbeit formulierte Theorie linear ist, entfällt Schritt 2. Wir wollen keine eigene FE-Software entwickeln und setzen daher die vorgestellte Theorie in der numerischen Software „FEAP“ um (siehe FEAP-Manual [18]). FEAP stellt eigene Routinen zur Verfügung, die den aufwändigsten Schritt, die Assemblierung des Gesamtgleichungssystems, übernehmen. Wir müssen lediglich die Elementsteifigkeitsmatrix sowie den Elementlastvektor in einem sogenannten Userelement implementieren.

4.1.1 Variationsformulierung der Gleichgewichtsbedingungen

Das Randwertproblem besteht aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.69), der Kinematik (2.68) und den Materialgesetzen (2.71). Für Erstere müssen wir noch Randbedingungen formulieren. Hierzu teilen wir je nach Problemstellung die Oberfläche $\partial\mathcal{R}$ disjunkt in zwei Teiloberflächen, für die wir entweder Verschiebungs- oder Spannungsrandbedingungen fordern:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}^u, \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}^t, \quad \partial\mathcal{R} = \partial\mathcal{R}^u \cup \partial\mathcal{R}^t, \quad \partial\mathcal{R}^u \cap \partial\mathcal{R}^t = \emptyset. \quad (4.1)$$

Analog teilen wir für die Randbedingungen der Hyperspannungsbilanz die Oberfläche $\partial\mathcal{R}$ disjunkt in zwei Teiloberflächen, für die wir Mikrodehnungs- oder Hyperspannungsrandbedingungen fordern:

$$\Psi = \Psi^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}^\Psi, \quad \Lambda = \Lambda^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}^\Lambda, \quad \partial\mathcal{R} = \partial\mathcal{R}^\Psi \cup \partial\mathcal{R}^\Lambda, \quad \partial\mathcal{R}^\Psi \cap \partial\mathcal{R}^\Lambda = \emptyset. \quad (4.2)$$

Wir haben in Kapitel 2.6 bereits gesehen, dass die Erfüllung dieses Randwertproblems äquivalent zur Erfüllung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist. Zusammen mit der Darstellung (2.46) der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte δW_i beziehungsweise der Darstellung (2.49) der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte δW_a führt das Prinzip der virtuellen Arbeit (2.42) auf die folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\mathcal{R}} \nabla[\delta \mathbf{u}] : \Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}, \Psi) \, dv + \int_{\mathcal{R}} \delta \Psi : \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}, \Psi) \, dv + \int_{\mathcal{R}} \nabla[\delta \Psi] : \boldsymbol{\mu}(\nabla[\Psi]) \, dv \\ & - \int_{\partial\mathcal{R}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, da - \int_{\partial\mathcal{R}} \delta \Psi : \Lambda \, da. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Lösungsfelder dieser variationellen Formulierung stammen aus dem SOBOLEV-Raum \mathcal{H}^1 , das heißt bis zu den ersten partiellen Ableitungen sind diese quadrat-integrabel. Die Randbedingungen (4.1) und (4.2) schränken die Wahl der Lösungsfelder und Variationsfelder zusätzlich ein (siehe REDDY [35]):

$$\mathbf{u} \in \mathcal{S} := \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}^u\}, \quad (4.4)$$

$$\Psi \in \mathcal{T} := \{\Psi \mid \Psi \in \mathcal{H}^1, \Psi = \Psi^0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}^\Psi\}, \quad (4.5)$$

$$\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} := \{\delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\mathcal{R}^u\}, \quad (4.6)$$

$$\delta \Psi \in \mathcal{W} := \{\delta \Psi \mid \delta \Psi \in \mathcal{H}^1, \delta \Psi = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\mathcal{R}^\Psi\}. \quad (4.7)$$

4.1.2 Diskretisierung des Integrationsgebietes

Wie bereits erwähnt betrachten wir ein lineares Randwertproblem und müssen das zu Grunde liegende Prinzip der virtuellen Arbeit (4.3) nicht mehr linearisieren, sondern können direkt zur Diskretisierung des Integrationsgebietes übergehen. Bei der Diskretisierung nähern wir das Integrationsgebiet \mathcal{R} , das aus kontinuierlich verteilten Punkten \mathbf{x} besteht, durch eine endliche Anzahl n_{el} von **finiten Elementen** \mathcal{R}_e an. Es darf weder Zwischenräume noch Überlappungen zwischen angrenzenden Elementen geben und die Vereinigung aller finiten Elemente muss näherungsweise dem Integrationsgebiet entsprechen:

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{R}^H := \bigcup_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathcal{R}_e. \quad (4.8)$$

Die kontinuierlich verteilten Feldgrößen \mathbf{u} und Ψ der finiten Elemente \mathcal{R}_e approximieren wir durch diskrete Werte an ausgezeichneten Stellen, den **Knoten**. Die Menge aller Knoten mit Verschiebungs- beziehungsweise Mikrodehnungsfreiheitsgrad definieren wir durch \mathcal{K}^u beziehungsweise \mathcal{K}^Ψ . Für jedes finite Element \mathcal{R}_e approximieren wir die Feldgrößen durch die Summe aller mit **Formfunktionen** $N_A^u(\mathbf{x})$ beziehungsweise $N_A^\Psi(\mathbf{x})$ gewichteten Knotenwerte \mathbf{u}^A beziehungsweise Ψ^A :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) := \sum_{A \in \mathcal{K}^u} N_A^u(\mathbf{x}) \mathbf{u}^A, \quad \Psi(\mathbf{x}) \approx \Psi^H(\mathbf{x}) := \sum_{A \in \mathcal{K}^\Psi} N_A^\Psi(\mathbf{x}) \Psi^A. \quad (4.9)$$

Die Approximationen der Lösungsfelder \mathbf{u} beziehungsweise Ψ stammen aus endlich-dimensionalen Funktionenräumen $\mathcal{S}^H, \mathcal{T}^H, \mathcal{V}^H, \mathcal{W}^H$, die die unendlich-dimensionalen Funktionenräume $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ approximieren und durch die Formfunktionen $N_A^u(\mathbf{x})$ beziehungsweise $N_A^\Psi(\mathbf{x})$ aufgespannt werden. Die Formfunktionen müssen beim Elementübergang problemabhängige Stetigkeitsanforderungen erfüllen. Zusätzlich muss das Residuum der Näherungslösungen im integralen Mittel verschwinden (vergleiche SCHWARZ [37]).

Im Allgemeinen können die Variationen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \Psi$ sowie die Lösungsfelder \mathbf{u} und Ψ durch unterschiedliche Formfunktionen approximiert werden. Wir verwenden aber den **isoparametrischen Ansatz**, bei dem für die Lösungsfelder und Variationen dieselben Formfunktionen verwendet werden:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \delta \mathbf{u}^H(\mathbf{x}) := \sum_{B \in \mathcal{K}^u} N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B, \quad \delta \Psi(\mathbf{x}) \approx \delta \Psi^H(\mathbf{x}) := \sum_{B \in \mathcal{K}^\Psi} N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \Psi^B. \quad (4.10)$$

Im Folgenden verzichten wir der Übersichtlichkeit halber auf die Summenzeichen und nutzen auch für die Summation der Knotenindizes die EINSTEINSche Summenkonvention. Die Knotenmenge, über die summiert wird, erschließt sich aus dem Kontext. Der Knotenwert $\delta \mathbf{u}^B$ oder $\delta \Psi^B$ verschwindet beispielsweise für alle Knoten B , für die wir Verschiebungsrandbedingungen (4.1) oder Mikrodehnungsrandbedingungen (4.2) fordern. Über diese muss an entsprechenden Stellen nicht summiert werden.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit (4.3) zusammen mit den Randbedingungen (4.1) und (4.2) bildet die Grundlage des Gleichungssystems der Finite-Elemente-Methode. Setzen wir die beiden Randbedingungen (4.1) und (4.2) in das Prinzip der virtuellen Arbeit (4.3) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] : \boldsymbol{\Sigma} \, dv + \int_{\mathcal{R}_e} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : \boldsymbol{\tau} \, dv \right. \\
+ \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : \boldsymbol{\mu} \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] \cdot \mathbf{t}^0 \, da \\
\left. - \int_{\partial \mathcal{R}_e^\Lambda} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : \boldsymbol{\Lambda}^0 \, da \right\}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Setzen wir die Materialgesetze (2.71) für die CAUCHYSche Spannung $\boldsymbol{\Sigma}$, die relative Spannung $\boldsymbol{\tau}$ sowie die Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Symmetrien von \mathbb{C} weiter

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] : ([1 + c_3] \nabla \mathbf{u} : \mathbb{C} - c_3 \boldsymbol{\Psi} : \mathbb{C}) \, dv \right. \\
+ \int_{\mathcal{R}_e} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : c_3 (\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{C} - \nabla \mathbf{u} : \mathbb{C}) \, dv \\
+ c_1 c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : (\nabla \boldsymbol{\Psi} : \mathbb{C}) \, dv \\
\left. - \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] \cdot \mathbf{t}^0 \, da - \int_{\partial \mathcal{R}_e^\Lambda} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : \boldsymbol{\Lambda}^0 \, da \right\}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Approximationen (4.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] : ([1 + c_3] \nabla [N_A^u(\mathbf{x}) \mathbf{u}^A] : \mathbb{C} - c_3 [N_A^\Psi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Psi}^A] : \mathbb{C}) \, dv \right. \\
+ \int_{\mathcal{R}_e} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : c_3 ([N_A^\Psi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Psi}^A] : \mathbb{C} - \nabla [N_A^u(\mathbf{x}) \mathbf{u}^A] : \mathbb{C}) \, dv \\
+ c_1 c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : (\nabla [N_A^\Psi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Psi}^A] : \mathbb{C}) \, dv \\
\left. - \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} [N_B^u(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}^B] \cdot \mathbf{t}^0 \, da - \int_{\partial \mathcal{R}_e^\Lambda} [N_B^\Psi(\mathbf{x}) \delta \boldsymbol{\Psi}^B] : \boldsymbol{\Lambda}^0 \, da \right\}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Die Knotenwerte sind unabhängig vom Integrationsgebiet \mathcal{R}_e und wir können somit ausklammern:

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \delta \mathbf{u}^B \cdot \left[(1 + c_3) \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^u(\mathbf{x})] \cdot \mathbb{C} \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \, dv \right] \cdot \mathbf{u}^A \right. \\
& - \delta \mathbf{u}^B \cdot \left[c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \left(\nabla [N_B^u(\mathbf{x})] \cdot \mathbb{C} \right) N_A^\Psi(\mathbf{x}) \, dv \right] : \Psi^A \\
& - \delta \Psi^B : \left[c_3 \int_{\mathcal{R}_e} N_B^\Psi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{C} \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \right) dv \right] \cdot \mathbf{u}^A \\
& + \delta \Psi^B : \left[c_3 \int_{\mathcal{R}_e} N_B^\Psi(\mathbf{x}) N_A^\Psi(\mathbf{x}) \mathbb{C} \, dv \right] : \Psi^A \\
& + \delta \Psi^B : \left[c_1 c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \left(\nabla [N_B^\Psi(\mathbf{x})] \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \right) \mathbb{C} \, dv \right] : \Psi^A \\
& \left. - \delta \mathbf{u}^B \cdot \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} N_B^u(\mathbf{x}) \mathbf{t}^0 \, da - \delta \Psi^B : \int_{\partial \mathcal{R}_e^\Lambda} N_B^\Psi(\mathbf{x}) \Lambda^0 \, da \right\}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Wir sortieren die Terme nach den auftretenden Variationen und interpretieren die Gleichung wie folgt:

$$0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \delta \mathbf{u}^B \cdot \left[\mathbf{K}_{BA}^{uu} \cdot \mathbf{u}^A + \mathbf{K}_{BA}^{u\Psi} : \Psi^A - \mathbf{F}_B^u \right] + \delta \Psi^B : \left[\mathbf{K}_{BA}^{\Psi u} \cdot \mathbf{u}^A + \mathbf{K}_{BA}^{\Psi\Psi} : \Psi^A - \mathbf{F}_B^\Psi \right] \right\}. \tag{4.15}$$

Hierbei haben wir die folgenden Elementsteifigkeiten $\mathbf{K}_{BA}^{\beta\alpha}$ sowie Elementlastvektoren \mathbf{F}_B^β identifiziert, für die wir zwei mittels des GAUSSSchen Integralsatz äquivalente Darstellungen angeben:

$$\mathbf{K}_{BA}^{uu} := (1 + c_3) \int_{\mathcal{R}_e} \nabla [N_B^u(\mathbf{x})] \cdot \mathbb{C} \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \, dv, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{K}_{BA}^{u\Psi} := -c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \left(\nabla [N_B^u(\mathbf{x})] \cdot \mathbb{C} \right) N_A^\Psi(\mathbf{x}) \, dv, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{K}_{BA}^{\Psi u} := -c_3 \int_{\mathcal{R}_e} N_B^\Psi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{C} \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \right) dv, \tag{4.18}$$

$$\mathbf{K}_{BA}^{\Psi\Psi} := c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \left[N_B^\Psi(\mathbf{x}) N_A^\Psi(\mathbf{x}) + c_1 \left(\nabla [N_B^\Psi(\mathbf{x})] \cdot \nabla [N_A^u(\mathbf{x})] \right) \right] \mathbb{C} \, dv, \tag{4.19}$$

$$\mathbf{F}_B^u := \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} N_B^u(\mathbf{x}) \mathbf{t}^0 \, da, \tag{4.20}$$

$$\mathbf{F}_B^\Psi := \int_{\partial \mathcal{R}_e^\Lambda} N_B^\Psi(\mathbf{x}) \Lambda^0 \, da. \tag{4.21}$$

Da sowohl die Knotenwerte $\delta \mathbf{u}^B$ als auch die Knotenwerte $\delta \Psi^B$ beliebig sind, müssen die Klammerterme in Gleichung (4.15) verschwinden und wir erhalten das lokale Gleichungssystem eines finiten Elements:

$$0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ K_{BA}^{uu} \cdot \mathbf{u}^A + K_{BA}^{u\Psi} : \Psi^A - \mathbf{F}_B^u \right\}, \quad 0 = \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ K_{BA}^{\Psi u} \cdot \mathbf{u}^A + K_{BA}^{\Psi\Psi} : \Psi^A - \mathbf{F}_B^{\Psi} \right\}. \quad (4.22)$$

Wir wollen abschließend noch die Elementsteifigkeiten und Elementlastvektoren, wie bei Verwendung der Finite-Elemente-Methode üblich, in kartesischen Koordinaten angeben. Diese Darstellung bietet den Vorteil, nahezu unverändert in einem entsprechenden Finite-Elemente-Code implementierbar zu sein.

1. Elementsteifigkeitsmatrizen:

$$K_{jBmA}^{uu} := (1 + c_3) \int_{\mathcal{R}_e} (\partial_i N_B^u) \mathbb{C}_{ijmn} (\partial_n N_A^u) dv, \quad (4.23)$$

$$K_{jBmnA}^{u\Psi} := -c_3 \int_{\mathcal{R}_e} (\partial_i N_B^u) \mathbb{C}_{ijmn} N_A^{\Psi} dv, \quad (4.24)$$

$$K_{jkBmA}^{\Psi u} := -c_3 \int_{\mathcal{R}_e} N_B^{\Psi} \mathbb{C}_{jkmn} (\partial_n N_A^u) dv, \quad (4.25)$$

$$K_{jkBmnA}^{\Psi\Psi} := c_3 \int_{\mathcal{R}_e} \left[N_B^{\Psi} N_A^{\Psi} + c_1 (\partial_i N_B^{\Psi}) (\partial_i N_A^{\Psi}) \right] \mathbb{C}_{jkmn} dv. \quad (4.26)$$

2. Elementlastvektoren:

$$\mathbf{F}_{jB}^u := \int_{\partial \mathcal{R}_e^t} N_B^u(\mathbf{x}) t_i^0 da, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{F}_{jkB}^{\Psi} := \int_{\partial \mathcal{R}_e^{\Lambda}} N_B^{\Psi}(\mathbf{x}) \Lambda_{jk}^0 da. \quad (4.28)$$

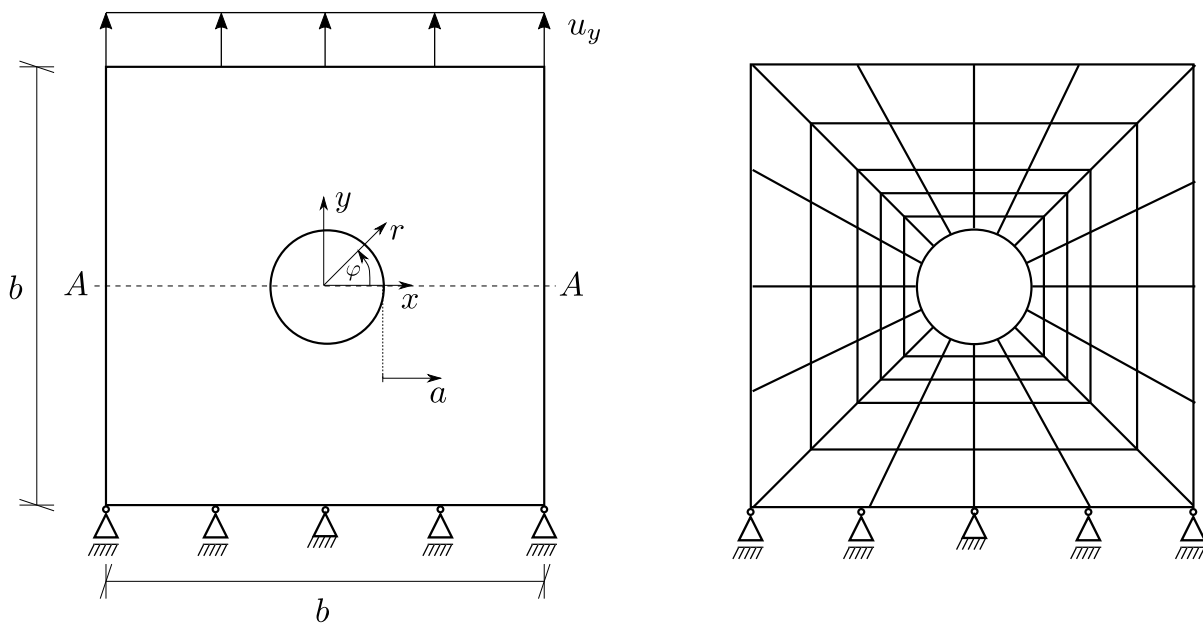
Tabelle 4.1.: Elemensteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren der Finite-Elemente-Methode

4.2 Gelochte Scheibe

Der Einfluss der Werte der klassischen Materialparameter λ_L und μ_L ist ausführlich in der klassischen linearen Elastizität untersucht. Dagegen ist über den Einfluss der nicht-klassischen Materialparameter c_1 und c_3 sehr wenig bekannt. Eine Ausnahme bildet die Arbeit von BRÖSE ET AL. [8], in der der Einfluss von c_1 und c_3 auf Dispersionsrelationen und auf Verläufe infolge einer eindimensionalen dynamischen Belastung diskutiert wird. Um einen Eindruck von dem Einfluss dieser Materialparameter in statischen Belastungen zu gewinnen, bemerken wir zuerst im Zusammenhang mit den Materialgesetzen

$$\Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}, \Psi) = (1 + c_3) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} - c_3 \Psi : \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{\tau} = c_3 (\Psi - \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbb{C}, \quad \boldsymbol{\mu} = c_1 c_3 \nabla \Psi : \mathbb{C}, \quad (4.29)$$

folgendes: Der Materialparameter c_3 ist offenbar charakteristisch für die Abweichung vom klassischen Fall. Beim Grenzübergang $c_3 \rightarrow 0$ nimmt die CAUCHYSche Spannung Σ die klassische Form $\Sigma^{(\text{klass})} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}$ an und sowohl die relative Spannung $\boldsymbol{\tau}$ als auch die Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ verschwindet. Ferner beinhaltet die Definition der Hyperspannung $\boldsymbol{\mu}$ als einziges Materialgesetz sowohl den Gradienten $\nabla \Psi$ als auch den Materialparameter c_1 . Daher charakterisiert der Materialparameter c_1 den Einfluss des Gradienten $\nabla \Psi$. Weiter gehen wir daran, eine gelochte Scheibe unter Zugbelastung numerisch zu untersuchen und daraus Erkenntnisse über den Einfluss der Materialparameter zu gewinnen. Die zugehörige Geometrie ist in Abbildung 4.1a skizziert. Speziell untersuchen wir eine gelochte Scheibe der Kantenlänge $b = 5\text{mm}$ mit einem Lochradius $r = 0.25\text{mm}$. Die Zugbelastung in Form einer vorgegebenen Verschiebung $u_y = 0.1\text{mm}$ geben wir auf der Oberkante auf. Sowohl die Ober- als auch die Unterkante soll horizontal verschiebbar sein. Um eine Starrkörperbewegung zu verhindern, wird zusätzlich der mittlere Knoten der Unterkante in y -Richtung fixiert. Ferner sei die Unterkante horizontal sowie die Seitenkanten insgesamt unbelastet.



(a) Geometrie der gelochten Rechteckscheibe

(b) Schematische Vernetzung der gelochten Scheibe

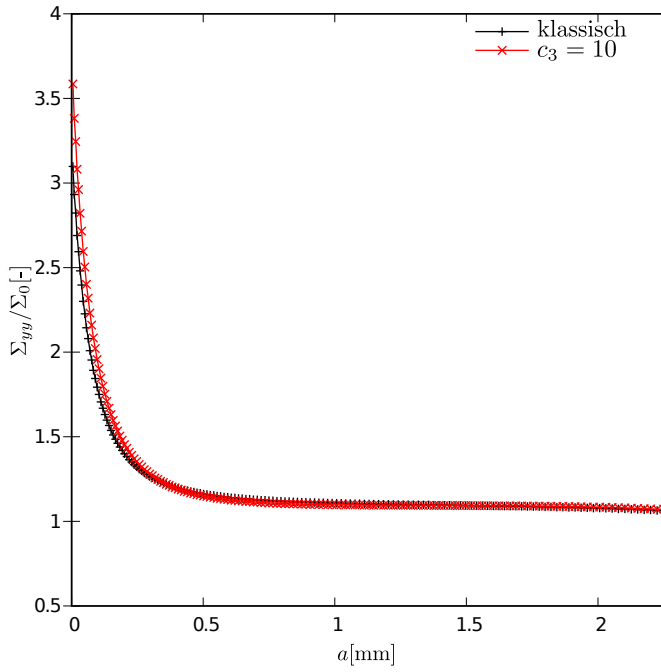
Abbildung 4.1.: Gelochte Rechteckscheibe

Dieses Problems ist mit dem akademischen Sonderfall einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit kreisrundem Loch vergleichbar, die mit einer einachsigen Zugspannung Σ_0 im Unendlichen belastet wird. Für die klassische Elastizität existieren geschlossene analytische Lösungen, die z. B. BECKER & GROSS [7] diskutieren. Das Loch verursacht eine Abweichung der Spannungsverteilung der ungelochten Scheibe. Die Umfangsspannung Σ_{yy} wird im Schnitt A — A am Lochrand maximal und nimmt dort den Wert $3 \Sigma_0$ an. Diese klingt allerdings mit dem Abstand zum Lochrand sehr schnell auf den Wert Σ_0 ab. Um die Abweichung quantitativ zu erfassen, wird der **Spannungskonzentrationsfaktor** $k := \frac{\Sigma_{yy}^*}{\Sigma_0}$ als Quotient aus der Umfangsspannung Σ_{yy}^* am Lochrand und der Zugspannung Σ_0 im Unendlichen definiert. Um die Spannungserhöhung von $k = 3$ hinreichend gut abzubilden, muss für ein HOOKEsches Stoffgesetz der Lochrand sehr fein vernetzt werden. So muss der Lochrand durch circa 720 Elemente vernetzt werden, wohingegen für die Untersuchung mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell eine Vernetzung mit circa 72 finiten Elementen genügt, um eine hinreichend gute Approximation der Spannungserhöhung zu erreichen. Die Knoten entlang der radialen Strahlen sind hierbei progressiv angeordnet, so dass wir mit steigendem Radius quadratisch steigende Elementkantenlängen erhalten. Wir verwenden 180 finite Elemente entlang jedes radialen Strahls (Abbildung 4.1b gibt die geometrische Situation schematisch wieder).

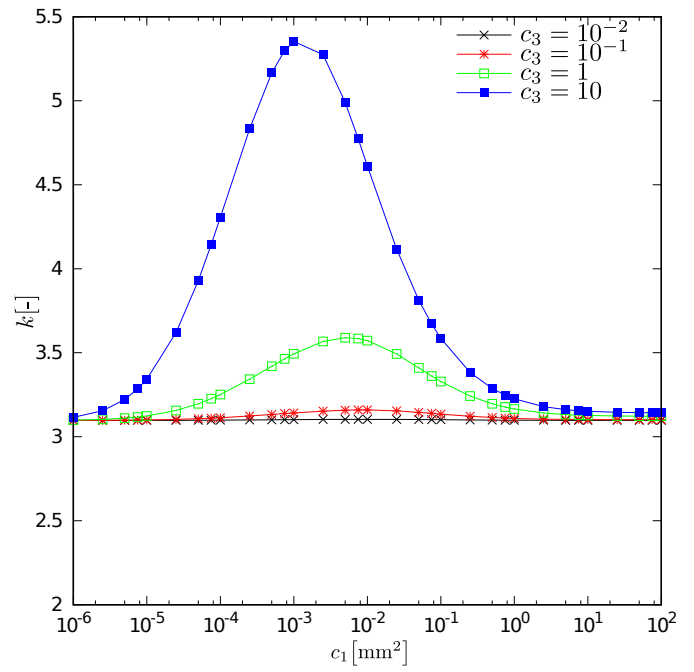
Wir ermitteln den Wert des Quotienten $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_0}$ entlang des horizontalen Schnittes A — A zuerst für den Grenzfall $c_3 \rightarrow 0$. Der Spannungskonzentrationsfaktor $k = 3.14$ ist höher als bei einer unendlich ausgedehnten Scheibe. In Abbildung 4.2a sind entlang des horizontalen Schnittes A — A die numerischen Ergebnisse des Quotienten $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_0}$ über dem Kerbabstand $a := x - r$ aufgetragen. Für große Werte des Materialparameters c_3 fallen nahezu alle Verläufe zusammen. In Abbildung 4.2a ist repräsentativ der Verlauf für $c_3 = 10$ angegeben. Die Werte des Quotienten $\frac{\Sigma_{yy}}{\Sigma_0}$ sind nahe dem Loch größer als die entsprechenden Werte im klassischen Fall, bis sich die Kurven bei $a \approx 0.3\text{mm}$ schneiden. Anschließend liegt die Spannungserhöhung leicht unter dem klassischen Verlauf.

Abbildung 4.2b zeigt die numerischen Ergebnisse der Parameterstudie des Spannungskonzentrationsfaktors k über dem Materialparameter c_1 aufgetragen. Als Scharparameter haben wir den Materialparameter c_3 verwendet, der die Abweichung von der klassischen Elastizität charakterisiert. Für sehr kleine und sehr große Werte von c_1 übt der Materialparameter c_3 nur einen geringen Einfluss auf den Verlauf des Spannungskonzentrationsfaktors k aus. Einen stärkeren Einfluss erkennen wir einzig im mittleren Bereich $c_1 \in [10^{-6}, 10^1]$. Das Maximum der verschiedenen Kurven hat hierbei eine leichte Verschiebung nach links hin zu kleineren Werten des Materialparameters c_1 .

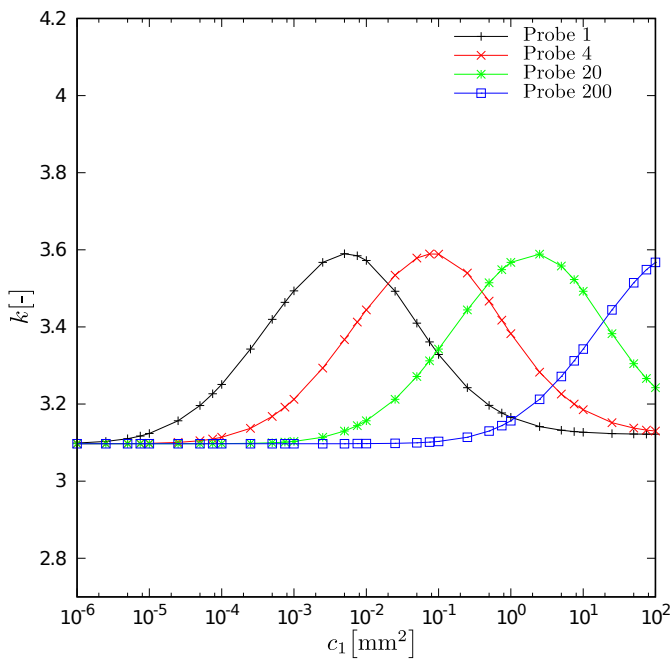
Als Letztes skalieren wir sowohl die Geometrie als auch die zugehörigen Randbedingungen mit vier verschiedene Faktoren $n = 1, 4, 20, 200$. Wie wir an Abbildung 4.2c erkennen, ergeben sich qualitativ identische Verläufe für alle Probengeometrien, die hin zu größeren Werten des Materialparameters c_1 verschoben sind. In Abbildung 4.2d haben wir daher den Materialparameter c_1 durch das Quadrat des Skalierungsfaktors n normiert. Bei dieser Normierung liegen alle Kurven übereinander, was einerseits das Erfassen von Längenskaleneffekten und andererseits die Definition einer internen Länge $\sqrt{c_1}$ verifiziert.



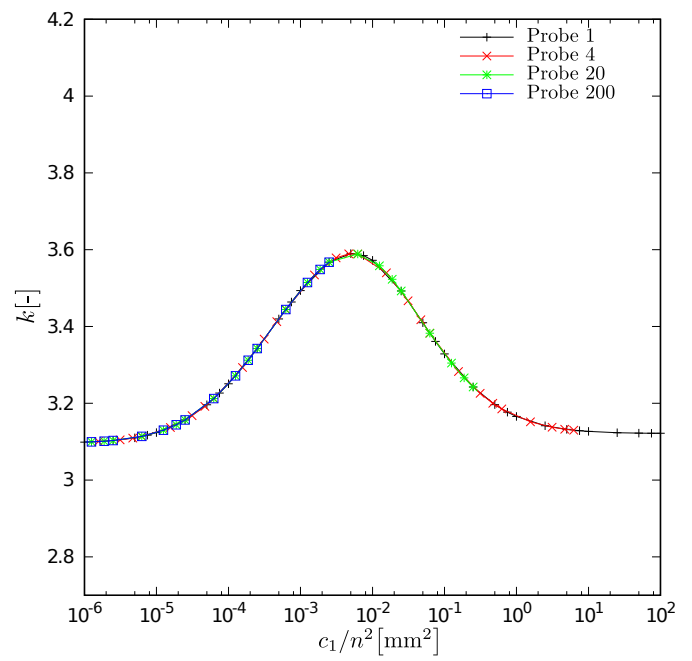
(a) Verlauf der Umfangsspannung Σ_{yy} aufgetragen über dem Kerbabstand a ($c_1 = 0.2 \text{ mm}^2$)



(b) Studie des Spannungskonzentrationsfaktors k



(c) Variation des Materialparameters c_1 mit $c_3 = 1$



(d) Variation des Quotienten c_1/n^2

Abbildung 4.2.: Ergebnisse der numerischen Untersuchung der gelochten Scheibe

4.3 Randriss im homogenen Material

4.3.1 Finite-Elemente-Modellierung

In diesem Abschnitt diskutieren wir den in Abbildung 4.3a skizzierten Randriss senkrecht zur Oberfläche eines homogenen Körpers. Das Materialverhalten des Körpers soll durch das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Modell beschrieben werden. Das mit der freien Software „Gmsh“ [17] erzeugte Netz aus insgesamt 1040 achtknotigen Elementen mit reduzierter Integration ist in Abbildung 4.3b skizziert. Der gesamte Körper ist ein Rechteck der Breite $b = 11\text{ mm}$ und Höhe $2h = 20\text{ mm}$ mit einem $a = 1\text{ mm}$ langen Riss, der senkrecht zur linken Kante auf halber Höhe in das Material hereinragt. Das Netz des Körpers haben wir in verschiedene Regionen unterteilt und den Koordinatenursprung fixieren wir an der Rissspitze. Insgesamt nutzen wir eine Vernetzung mit 14 Elementen entlang der Ober- und Unterkante sowie mit 24 Elementen entlang der beiden Seitenkanten. Um die Rissspitze herum haben wir in einem quadratischen Bereich mit der doppelten Risslänge als Kantenlänge sehr fein vernetzt. Diesen Bereich vernetzen wir mit 16 radialen Streifen, die jeweils aus 10 Elementen bestehen. Bei sinkendem Abstand zur Rissspitze werden die Kantenlängen der Elemente progressiv kleiner. Weiter gehen wir analog zu den analytischen Lösungen aus Kapitel 3 von einem ebenen Verformungszustand aus.

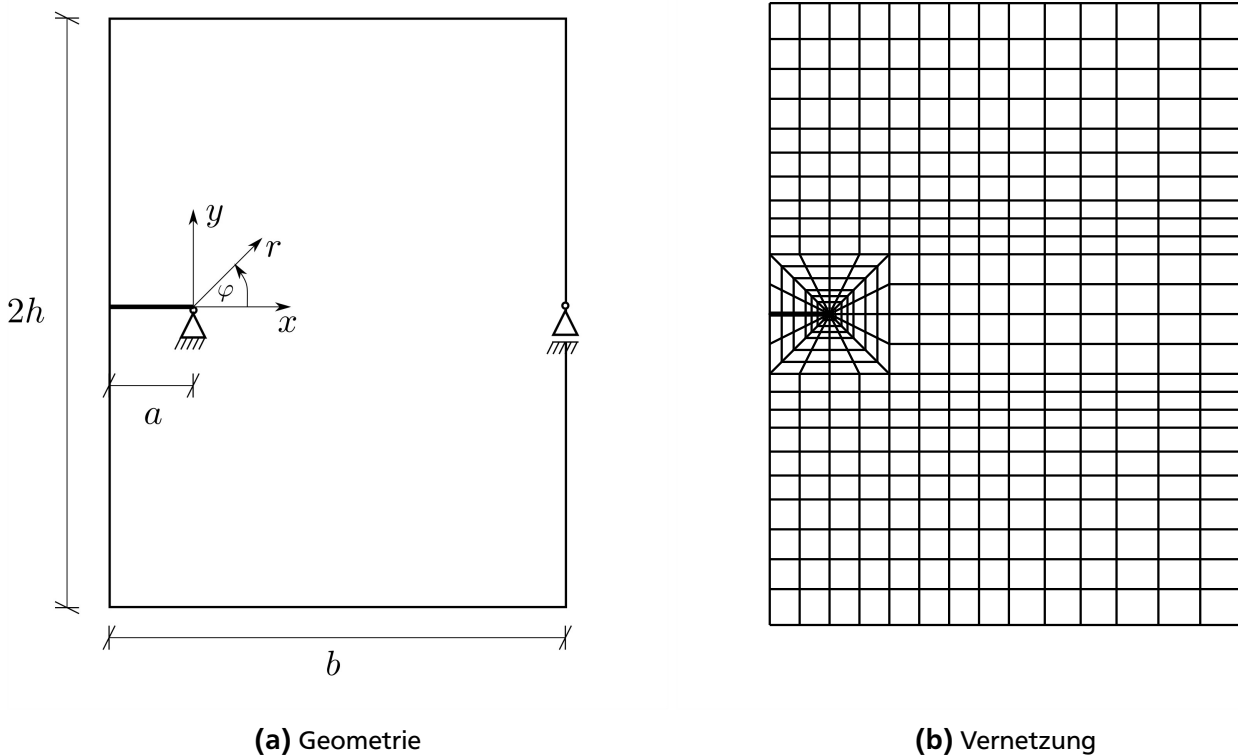
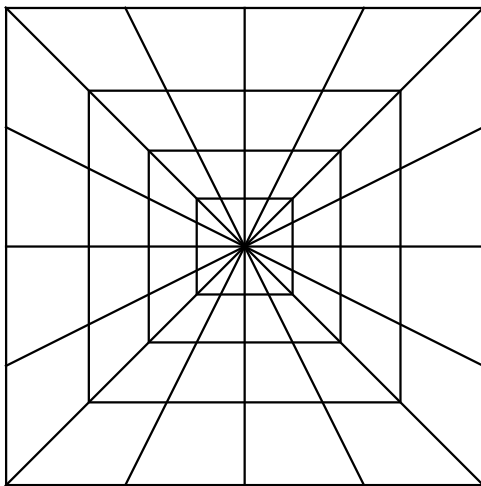


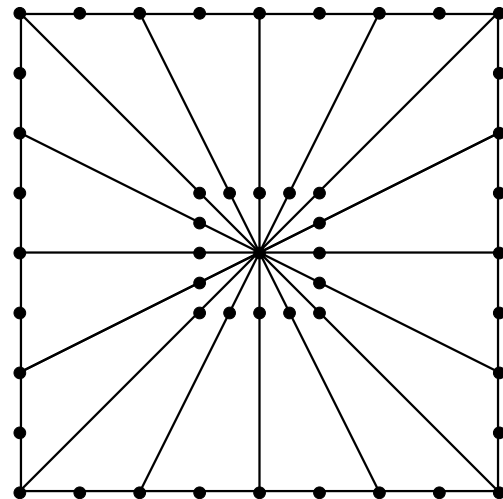
Abbildung 4.3.: Randriss in einem homogenen Material

Die numerische Simulation eines mikromorphen Kontinuums ist im Vergleich zu einem rein elastischen Kontinuum deutlich empfindlicher bezüglich der Vernetzung. Aus diesem Grund wird die Vernetzung in Rissspitzennähe extrem verfeinert, so dass das Verhältnis der Kantenlänge l der Elemente direkt an der Rissspitze und der Breite b des Modells bei $\frac{l}{b} \approx 10^{-9}$ liegt. Weiter spielt die Art der Vernetzung eine entscheidende Rolle. Um mögliche Oszillationen der Spannungswerte zu vermeiden, ist es ratsam, die Elemente bis zur Rissspitze entlang der in Abbildung 4.4a skizzierten radialen Strahlen fortzuführen.

Für die erste Elementschicht, die schematisch in Abbildung 4.4b gezeichnet ist, werden zu Dreiecken degenerierte Viertelpunktelemente verwendet (siehe KUNA [28]). Wie die Namensgebung andeutet ist die charakteristische Eigenschaft, dass zwei der vier Seitenmittelnknoten nicht auf der Halb– sondern auf der Viertelposition der entsprechenden Kante angeordnet werden. Die Formfunktionen erhalten eine Wurzelabhängigkeit, wodurch diese speziellen Elemente besonders gut für das Abbilden einer Wurzelsingularität geeignet sind. Die degenerierte Kante modellieren wir durch drei Knoten, die allesamt bei $r = 0$ angeordnet sind.



(a) Radiales Netz in der Umgebung der Rissspitze



(b) Erste Elementschicht um die Rissspitze

Abbildung 4.4.: Vernetzung der Rissspitze

4.3.2 Randbedingungen und Materialparameter

Als Randbedingungen für die numerischen Berechnungen wählen wir eine fixierte Rissspitze, das heißt:

$$u_r(r = 0 \text{ mm}, \varphi) = u_\varphi(r = 0 \text{ mm}, \varphi) = 0 . \quad (4.30)$$

Um eine Starrkörperrotation des Körpers zu verhindern, halten wir zusätzlich einen beliebigen weiteren Knoten horizontal fest. Wir wählen hierfür den Knoten an der rechten Kante auf Höhe der Rissspitze:

$$u_\varphi(r = 10 \text{ mm}, \varphi = 0) = 0 . \quad (4.31)$$

Für die Mikrodehnungen Ψ_{ij} werden für alle Knoten des Netzes keine Vorgaben getroffen, das heißt diese werden für das gesamte Netz als Lösung des Gleichungssystems bestimmt.

Die Spannungsrandbedingungen wählen wir entsprechend dem untersuchten Modus. Durch Aufbringen einer Zugspannung $\Sigma_{\varphi\varphi} = 100 \text{ GPa}$ auf beide Rissflanken erzeugen wir eine reine Modus-*I*-Belastung. Entsprechend belasten wir die Rissflanken durch eine Scherspannung $\Sigma_{r\varphi} = 100 \text{ GPa}$, um eine reine Modus-*II*-Belastung zu erzeugen. Alle Kanten des Körpers nehmen wir zudem als doppelkraftfrei an.

Ferner werden in allen Rechnungen des Abschnittes 4.3 die Werte der klassischen Materialparameter anhand des YOUNGSchen Moduls E und der POISSONSchen Zahl ν angegeben:

$$E = \frac{\mu_L (3 \lambda_L + 2 \mu_L)}{\lambda_L + \mu_L} , \quad \nu = \frac{\lambda_L}{2 (\lambda_L + \mu_L)} . \quad (4.32)$$

Insbesondere haben wir in allen Rechnungen des Abschnittes 4.3 die folgenden Werte gewählt:

$$E = 100 \text{ GPa} , \quad \nu = 0.3 . \quad (4.33)$$

4.3.3 Auswertung

Um die analytischen mit den numerischen Rissspitzennahfeldern zu vergleichen, betrachten wir jeweils für eine reine Modus-*I*- sowie Modus-*II*-Belastung sowohl den Spannungsexponenten als auch die Winkelfunktionen nullter Ordnung, für die wir bereits die funktionalen Zusammenhänge kennen:

$$\Sigma_{ij} = \sum_{s=0} r^{p+\frac{1}{2}(s-1)} \Sigma_{ij}^{(s)} \quad (4.34)$$

$$= (2\pi r)^{(p-1)} \left[\tilde{K}_I f_{ij}^I(\varphi) + \tilde{K}_{II} f_{ij}^{II}(\varphi) \right] + O(1) , \quad (4.35)$$

$$\mu_{ijk} = \sum_{s=0} r^{p+\frac{1}{2}(s-1)} \mu_{ijk}^{(s)} \quad (4.36)$$

$$= (2\pi r)^{(p-1)} \left[\tilde{L}_I g_{ijk}^I(\varphi) + \tilde{L}_{II}^{(+)} (g_{ijk}^{II})^{(+)}(\varphi) + \tilde{L}_{II}^{(-)} (g_{ijk}^{II})^{(-)}(\varphi) \right] + O(1) . \quad (4.37)$$

Entlang der Koordinatenlinie $\varphi = 0$ können wir die einzelnen Intensitätsfaktoren auch bei einer Mixed-Mode-Belastung durch Logarithmieren dieser Beziehungen und Einsetzen der Verläufe aus Tabelle 3.11 und 3.13 gewinnen. Die Intensitätsfaktoren bleiben bestimmbar, da nur die für die Definition relevanten Winkelfunktionen nicht verschwinden.

Zusammengefasst erhalten wir für hinreichend kleine Radien r die logarithmischen Beziehungen

$$\log |\Sigma_{\varphi\varphi}| = (p-1) \log(2\pi r) + \log \tilde{K}_I , \quad (4.38)$$

$$\log |\Sigma_{r\varphi}| = (p-1) \log(2\pi r) + \log \tilde{K}_{II} , \quad (4.39)$$

$$\log |\mu_{\varphi r\varphi}| = (p-1) \log(2\pi r) + \log \tilde{L}_I , \quad (4.40)$$

$$\log |\mu_{\varphi rr} + \mu_{\varphi\varphi\varphi}| = (p-1) \log(2\pi r) + \log \tilde{L}_{II}^{(+)} , \quad (4.41)$$

$$\log |\mu_{\varphi rr} - \mu_{\varphi\varphi\varphi}| = (p-1) \log(2\pi r) + \log \tilde{L}_{II}^{(-)} . \quad (4.42)$$

Tragen wir die Ergebnisse doppelt-logarithmisch auf, so erhalten wir eine Gerade, deren Steigung dem Spannungsexponenten p entspricht. In der Nähe der Risspitze führen wir eine lineare Regression der Ergebnisse der Finite-Elemente-Rechnung durch. In Abbildung 4.5 sind die Ergebnisse einer solchen linearen Regression dargestellt. Die gestrichelte Linie entspricht einer Geraden $y = mx + b$ mit einer fest vorgegebenen Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Wie wir an Abbildung 4.5 erkennen können, treffen die numerischen Ergebnisse diesen Wert sehr gut. Für Werte $r < 10^{-7}$ kommen wir dem Bereich der Rechnergenauigkeit sehr nahe, daher ist dort eine stärkere Abweichung von der Ausgleichsgeraden zu erwarten.

Zur Berechnung der Intensitätsfaktoren und des Spannungsexponenten p setzen wir die freie Software „Gnuplot“ ein, die eine nicht-lineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Es ergibt sich in allen berechneten Beispielen eine sehr gute Übereinstimmung (Fehler $< 1\%$) zwischen dem analytischen Wert $p = \frac{1}{2}$ und dem numerisch ermittelten Wert für p . Zusätzlich liefert diese Übereinstimmung eine erste Verifikation der Genauigkeit der numerischen Lösungen. Demzufolge wurde im Rest der Arbeit für p stets der Wert $\frac{1}{2}$ gesetzt.

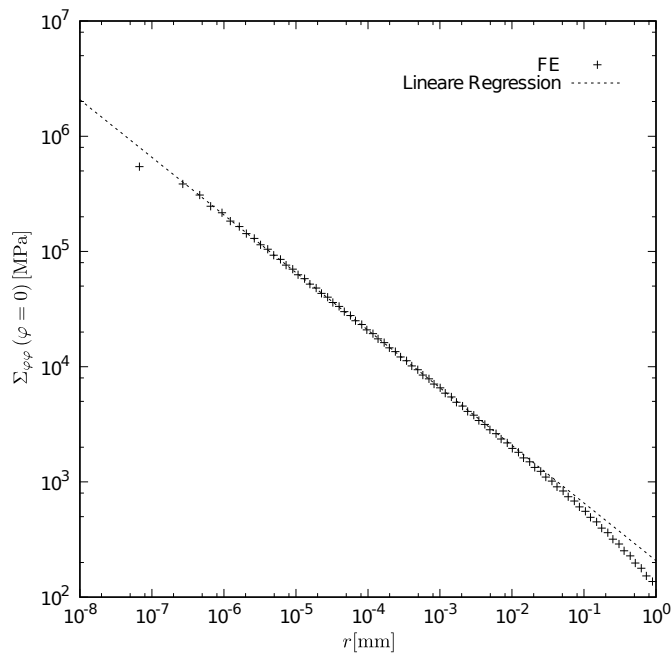


Abbildung 4.5.: Lineare Regression am Beispiel der Spannung $\Sigma_{\varphi\varphi}$ mit $c_1 = 10^{-2} \text{ mm}^2$ und $c_3 = 1$

Sowohl die Intensitätsfaktoren der CAUCHYschen Spannung Σ aus Abschnitt 3.9 als auch die Intensitätsfaktoren der Hyperspannung μ aus Abschnitt 3.10 stellen in der analytischen Lösung freie Parameter dar, die wir nur numerisch bestimmen können. Die analytisch bestimmten Winkelfunktionen aus Kapitel 3 vergleichen wir anhand der Knotenwerte für einen Radius $r = 5 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$, bei dem die singulären Terme noch dominant sind, und einem Winkel $\varphi \in [-180^\circ, 180^\circ]$, um die in Abschnitt 3.3 angenommenen Symmetrieeigenschaften zu verifizieren.

4.3.4 Ergebnisse für Modus I

Winkelfunktionen

In den Abbildungen 4.6a – 4.6d vergleichen wir die mittels der Finiten-Elemente-Methode ermittelten Winkelfunktionen mit den analytischen Ergebnissen aus Abschnitt 3.11. Diese Abbildungen liefern zum einen eine weitere Verifikation der Genauigkeit der numerischen Ergebnisse. Zum Anderen bestätigen sie a posteriori die in Gleichung (3.28) angenommenen Symmetriebedingungen der Mikrodehnungen Ψ_{ij} .

Die Winkelfunktionen nullter Ordnung der CAUCHYSchen Spannung Σ lauten nach Gleichung (4.35) und Tabelle 3.11:

$$\begin{bmatrix} f_{rr}^I \\ f_{\varphi\varphi}^I \\ f_{r\varphi}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \\ 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \\ \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Wir wählen für die Differenz $\Psi - \bar{\Psi}$ einen zu Gleichung (3.304) analogen Ansatz

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{r}} (\Psi_{ij} - \bar{\Psi}_{ij}) \right] = \frac{1}{2c_1 c_3 \mu_L} L_I h_{ij}^I \quad (4.44)$$

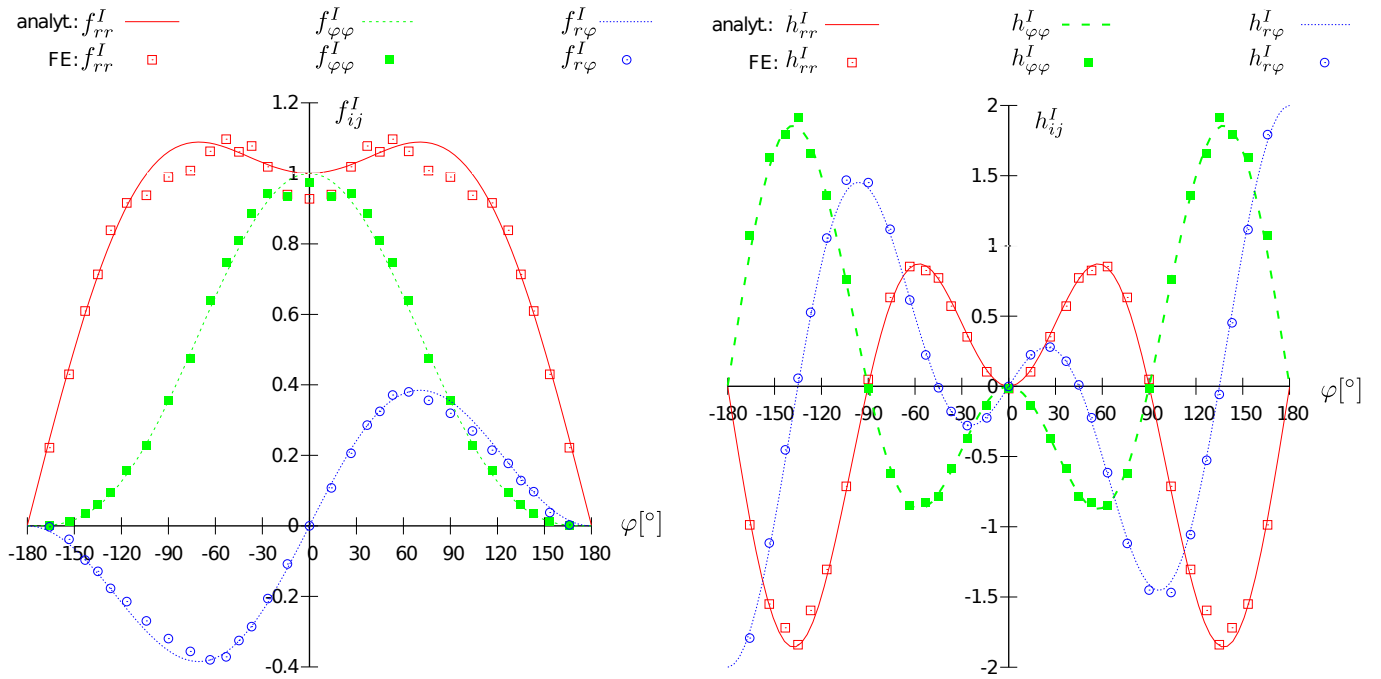
und gewinnen somit aus den Verläufen aus Tabelle 3.12 die folgenden Winkelfunktionen:

$$\begin{bmatrix} h_{rr}^I \\ h_{\varphi\varphi}^I \\ h_{r\varphi}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) - \cos \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ -\cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \cos \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ -\sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \sin \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Gleichung (4.37) und Tabelle 3.13 liefern die entsprechenden Winkelfunktionen der Hyperspannung μ :

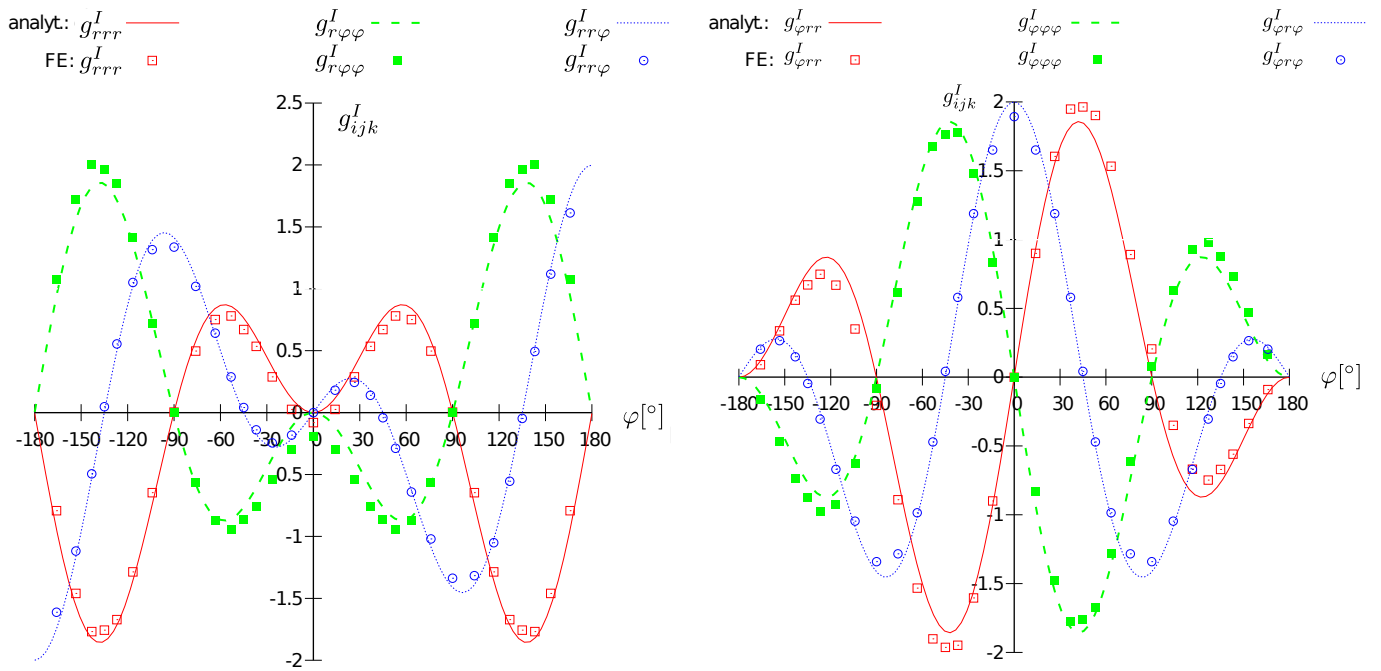
$$\begin{bmatrix} g_{rrr}^I \\ g_{r\varphi\varphi}^I \\ g_{rr\varphi}^I \\ g_{\varphi rr}^I \\ g_{\varphi\varphi\varphi}^I \\ g_{\varphi r\varphi}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) - \cos \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ -\cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \cos \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ -\sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \sin \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ \sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \sin \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ -\sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) - \sin \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \\ \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) + \cos \left(\frac{5}{2} \varphi \right) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Prinzipiell ist zu bemerken, dass für Modus I die Winkelfunktionen der beiden Spannungen Σ und μ in den Termen nullter Ordnung der asymptotischen Entwicklung von den Materialparametern unabhängig sind. Dies ist für die entsprechenden Winkelfunktionen im Rahmen einer mikropolaren Elastizität nicht der Fall (siehe ELSÄSSER[10]). Insgesamt zeigen die Verläufe in Abbildung 4.6 eine gute Übereinstimmung zwischen den analytischen und numerischen Ergebnissen für die Winkelfunktionen.



(a) Winkelfunktionen der CAUCHYSchen Spannung Σ

(b) Winkelfunktionen der Mikrodehnung Ψ



(c) Radiale Winkelfunktionen der Hyperspannung μ

(d) Umfangswinkelfunktionen der Hyperspannung μ

Abbildung 4.6.: Vergleich der numerisch und analytisch bestimmten Winkelfunktionen für Modus I

Intensitätsfaktoren

Eine letzte Verifikation der Genauigkeit der numerischen Ergebnisse vermittelt eine Betrachtung des Spannungsintensitätsfaktors K_I für den Grenzfall der klassischen linearen Elastizität, also $c_3 \rightarrow 0$, mit

$$E = 100 \text{ GPa}, \quad \nu = 0,3. \quad (4.47)$$

Der numerisch ermittelte Wert beträgt $K_I = 207,5 \text{ MPa mm}^2$ (siehe Gleichung (3.306)). Zum Vergleich steht der Wert $K_I = 208,1 \text{ MPa mm}^2$, der mit der empirischen Formel nach TADA ET AL. [40], Seite 2.11, berechnet wurde. Offensichtlich liegt für derartige Probleme eine hervorragende Genauigkeit vor.

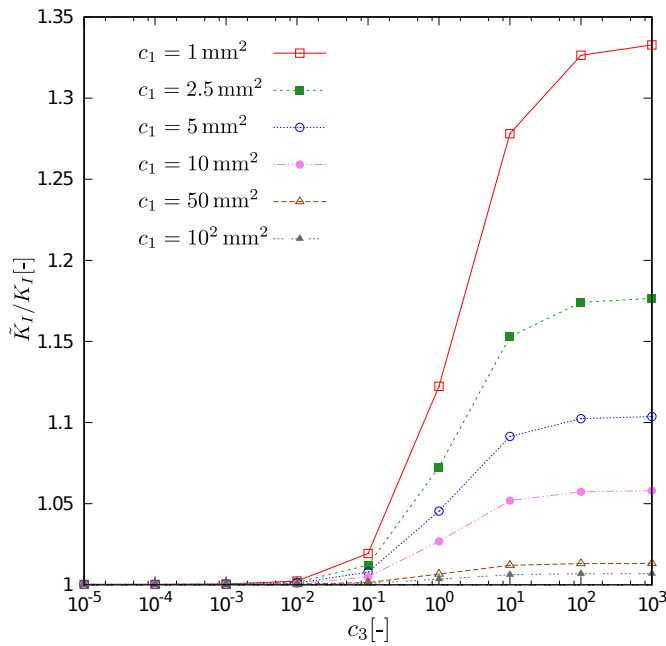
Im Rest dieses Abschnitts widmen wir uns dem Einfluss der nicht-klassischen Materialparameter c_1 und c_3 auf die Intensitätsfaktoren. Das Verhalten des Intensitätsfaktors \tilde{K}_I der CAUCHYSchen Spannung Σ des mikromorphen Modells bezogen auf die entsprechenden Werte K_I der klassischen linearen Elastizität ist in den Abbildungen 4.7a und 4.7b veranschaulicht. Die Berechnung von \tilde{K}_I und die Auswertung geschehen anhand der Gleichungen (3.307) und (4.38). Zwei Aspekte sind in diesen Bildern auffällig.

Zum einen sind alle Intensitätsfaktoren \tilde{K}_I des mikromorphen Modells größer als der entsprechende Intensitätsfaktor K_I der klassischen Elastizität. Zum anderen wissen wir bereits, dass wir die klassische Elastizität als Sonderfall des mikromorphen Modells gewinnen können. Erwartungsgemäß gilt

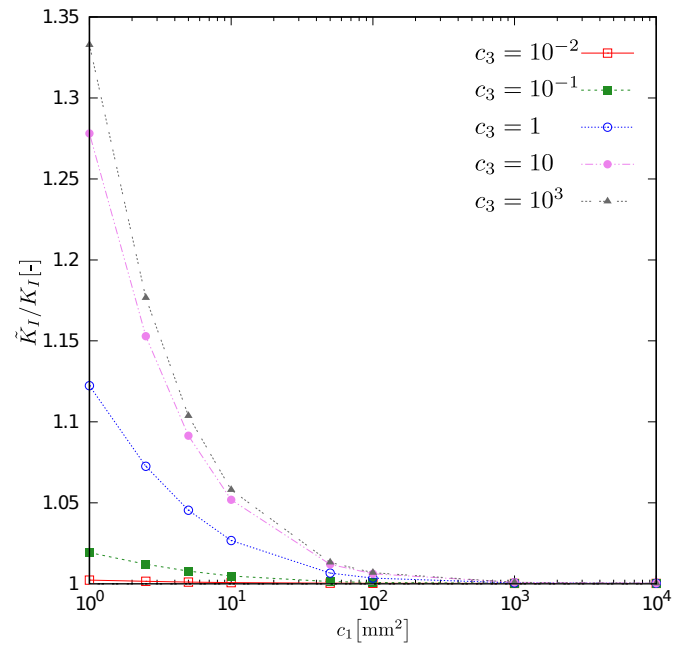
$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} \frac{\tilde{K}_I}{K_I} = 1 \quad (4.48)$$

unabhängig vom Materialparameter c_1 , wie wir der Abbildung 4.7a entnehmen können. Einen Übergang zum klassischen Fall unabhängig von c_3 erkennen wir in Abbildung 4.7b auch für sehr große Werte von c_1 . Anhand der Materialgleichung (2.71)₃ sehen wir, dass durch große Werte von c_1 betragsmäßig große Werte der Hyperspannungen μ_{ijk} impliziert werden. Anscheinend bewirkt diese Erhöhung der Werte der Hyperspannungen μ_{ijk} über die Kopplung in den Materialgleichungen eine betragsmäßige Verminderung der Werte der CAUCHYSchen Spannungen Σ_{ij} und somit eine Verminderung des Intensitätsfaktors \tilde{K}_I .

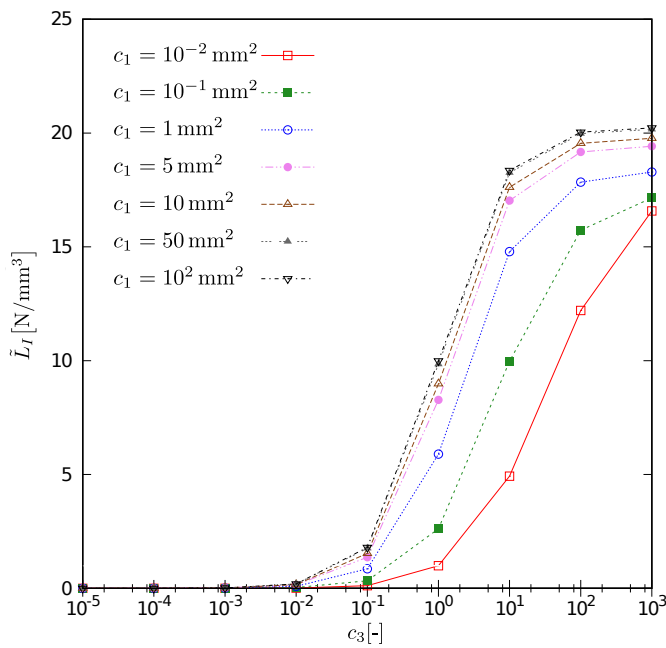
Die Berechnung des Intensitätsfaktors \tilde{L}_I für die Hyperspannung μ erfolgt mit Hilfe der Formel (3.311) und einer Auswertung mit Hilfe der Formel (4.40). Der Einfluss der Materialparameter auf die Werte von \tilde{L}_I ist in den Abbildungen 4.7c und 4.7d veranschaulicht. Beim Grenzübergang $c_3 \rightarrow 0$ zum klassischen Fall erkennen wir in Abbildung 4.7c verschwindend kleine Werte des Intensitätsfaktors \tilde{L}_I unabhängig von den Werten des Materialparameters c_1 . Abbildung 4.7d zeigt, dass große Werte von c_1 , die, wie wir gesehen haben, eine Abschwächung des Intensitätsfaktors \tilde{K}_I bewirken, eine Erhöhung der Werte des Intensitätsfaktors \tilde{L}_I nach sich ziehen. Je größer der Wert von c_3 ist, umso stärker ist dieser Effekt zu beobachten.



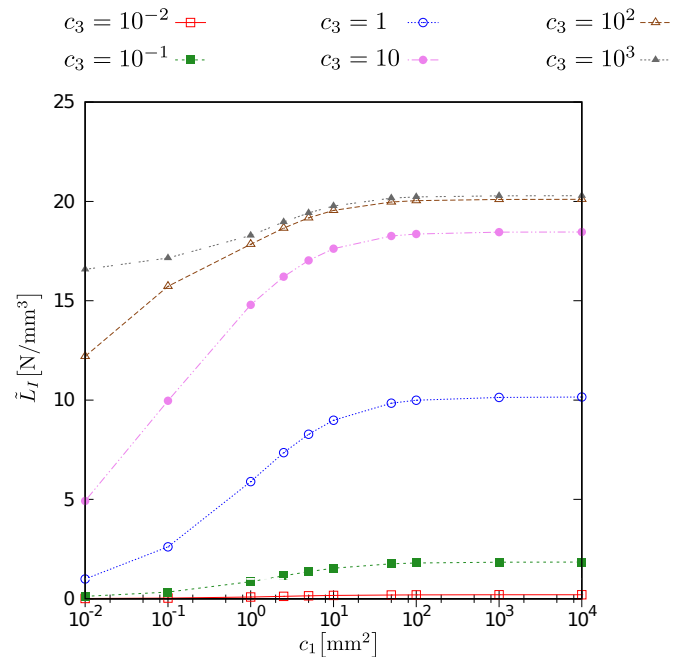
(a) Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_I vom Materialparameter c_3



(b) Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_I vom Materialparameter c_1



(c) Abhängigkeit des Hyperspannungsintensitätsfaktors \tilde{L}_I vom Materialparameter c_3



(d) Abhängigkeit des Hyperspannungsintensitätsfaktors \tilde{L}_I vom Materialparameter c_1

Abbildung 4.7.: Numerische Ergebnisse der Intensitätsfaktoren für Modus I

4.3.5 Ergebnisse für Modus II

Die Schritte zur Bestimmung der Winkelfunktionen nullter Ordnung der CAUCHYSchen Spannung Σ sind vollkommen analog zu denjenigen im Falle von Modus I. Aus Gleichung (3.304) und Tabelle 3.11 folgt

$$\begin{bmatrix} f_{rr}^{II} \\ f_{\varphi\varphi}^{II} \\ f_{r\varphi}^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \\ -3 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \\ \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \left(\frac{3}{2} \varphi \right) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

In Abbildung 4.8a erkennen wir eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen mit den analytischen Ergebnissen für die Winkelfunktionen f_{rr}^{II} , $f_{\varphi\varphi}^{II}$ und $f_{r\varphi}^{II}$.

Für die Terme nullter Ordnung der Differenz $\Psi^{II} - \bar{\Psi}^{II}$ und der Hyperspannung μ^{II} gelten ebenfalls Darstellungen mit Hilfe von Winkelfunktionen. Gemäß den Tabellen 3.12 und 3.13 gilt für diese Terme

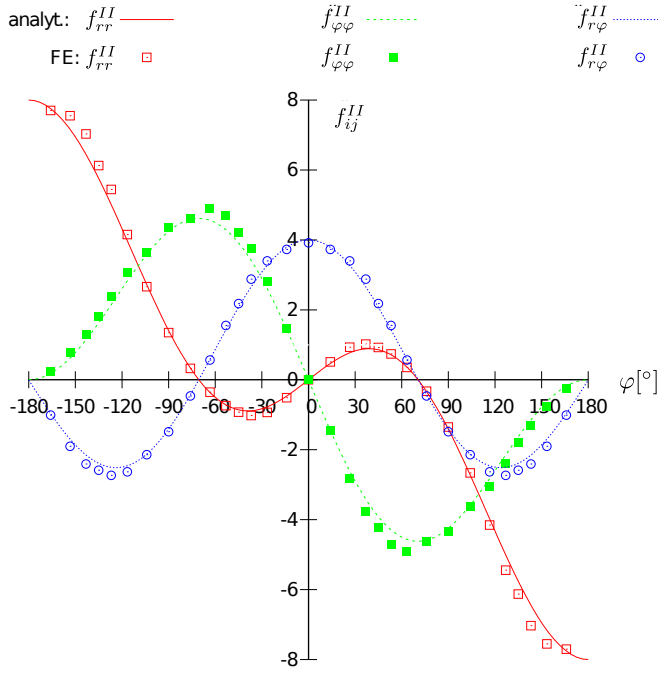
$$\Psi_{ij}^{II} - \bar{\Psi}_{ij}^{II} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{2c_1 c_3 \mu_L} (h_{ij}^{II})^{(-)} + \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{L}_{II}^{(+)}}{c_1 c_3 (\lambda_L + \mu_L)} (h_{ij}^{II})^{(+)}, \quad (4.50)$$

$$\mu_{ijk}^{II} = \frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{2\sqrt{2\pi}r} (g_{ijk}^{II})^{(-)} + \frac{\tilde{L}_{II}^{(+)}}{\sqrt{2\pi}r} (g_{ijk}^{II})^{(+)}, \quad (4.51)$$

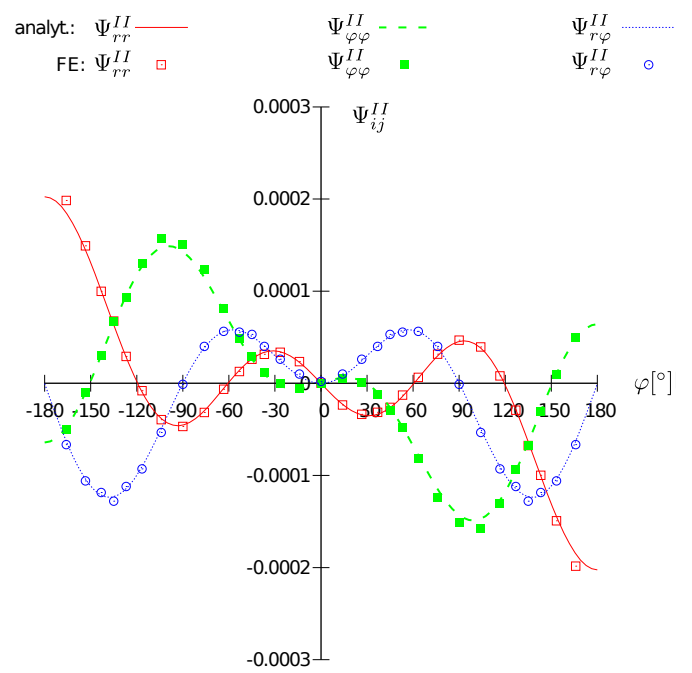
wobei $(h_{ij}^{II})^{(\pm)}$ und $(g_{ijk}^{II})^{(\pm)}$ die jeweiligen Winkelfunktionen angeben. Um die Übersicht beim Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen zu bewahren, werden wir die folgenden Winkelverläufe anhand der Differenz $\Psi_{ij}^{II} - \bar{\Psi}_{ij}^{II}$ und den Hyperspannungen μ_{ijk}^{II} selbst, und nicht anhand ihrer zugehörigen Winkelfunktionen diskutieren.

Die Winkelverläufe in den Abbildungen 4.8a – 4.8d sind für einen Radius $r = 5 \cdot 10^{-6}$ mm ermittelt worden und weisen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den numerischen und analytischen Ergebnissen auf. Auch die in Gleichung (3.32) und (3.32) angenommenen Symmetriebedingungen werden durch die Verläufe in den Abbildungen 4.8a und 4.8b vollkommen bestätigt. Alle Winkelverläufe in den Abbildungen 4.8a – 4.8d basieren auf den Werten der Intensitätsfaktoren. Der restliche Teil dieses Abschnitts ist daher der Diskussion dieser Intensitätsfaktoren gewidmet.

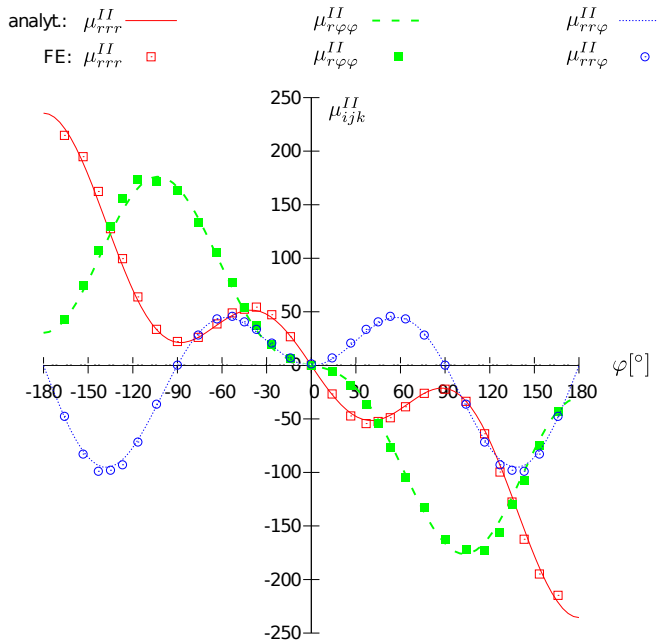
Durch Auswerten der Gleichungen (3.308), (3.314) beziehungsweise (3.315) basierend jeweils auf den Gleichungen (4.39), (4.41) und (4.42) lassen sich Intensitätsfaktoren \tilde{K}_{II} , $\tilde{L}_{II}^{(+)}$ und $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ bestimmen. Mit Hilfe der empirischen Formel für klassische Elastizität, die in TADA ET AL. [40], Seite 2.29, angegeben wird, ergibt sich für die Modus-II-Lastung des vorliegenden Abschnittes der Wert $\tilde{K}_{II} = 199,3 \frac{\text{MPa}}{\sqrt{\text{mm}}}$. Aus der Finite-Elemente-Berechnung ergibt sich für klassische Elastizität ein Wert $K_{II} = 187,5 \frac{\text{MPa}}{\sqrt{\text{mm}}}$. Dies entspricht einer Abweichung von 5,92% des numerischen Ergebnissen von dem empirisch bestimmten Wert. Dies ist eine gute Näherung für derartige Probleme.



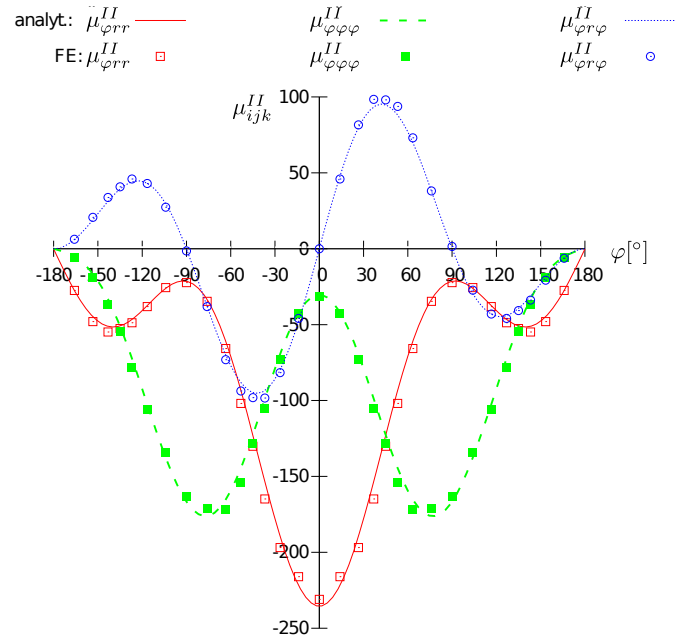
(a) Winkelfunktionen der CAUCHYschen Spannung Σ



(b) Winkelverläufe der Mikrodehnung Ψ

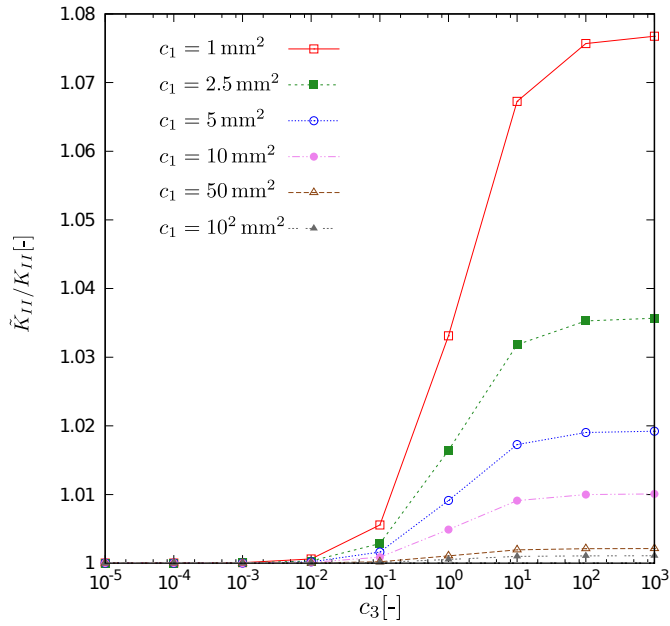


(c) Radiale Winkelverläufe der Hyperspannung μ

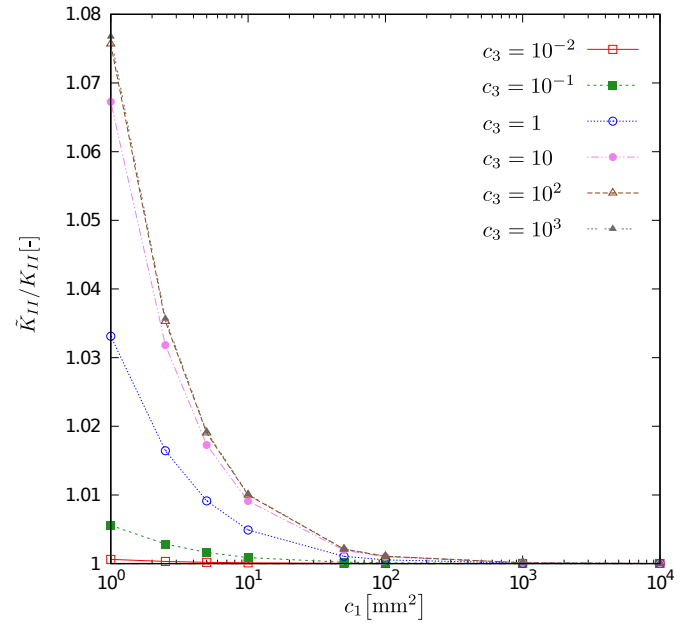


(d) Umfangswinkelverläufe der Hyperspannung μ

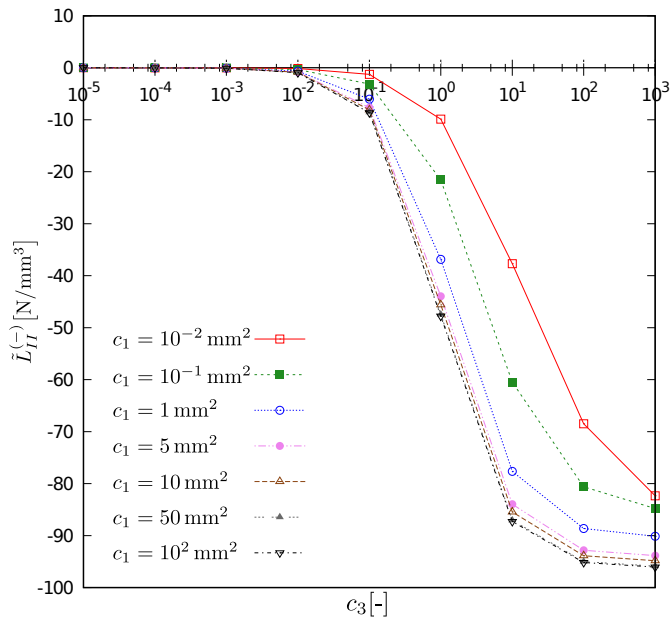
Abbildung 4.8.: Vergleich der numerisch und analytisch bestimmten Winkelverläufe für Modus II



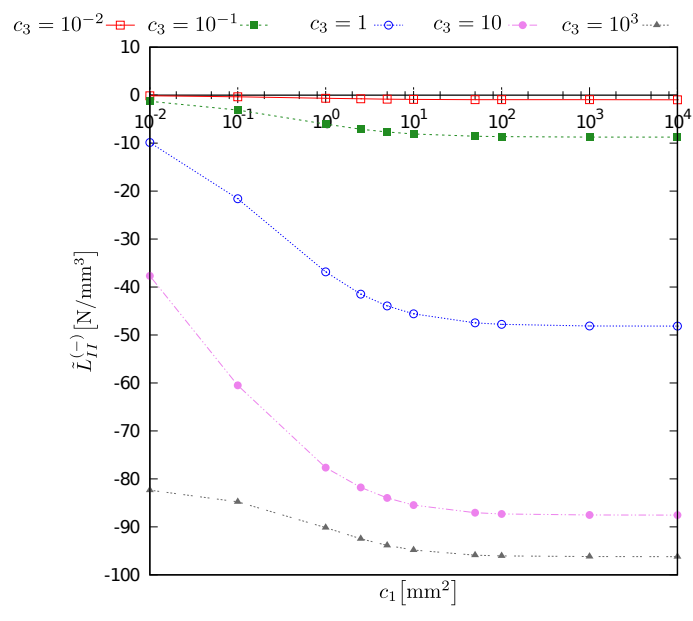
(a) Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_{II} vom Materialparameter c_3



(b) Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_{II} vom Materialparameter c_1



(c) Abhängigkeit des Hyperspannungsintensitätsfaktors $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ vom Materialparameter c_3



(d) Abhängigkeit des Hyperspannungsintensitätsfaktors $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ vom Materialparameter c_1

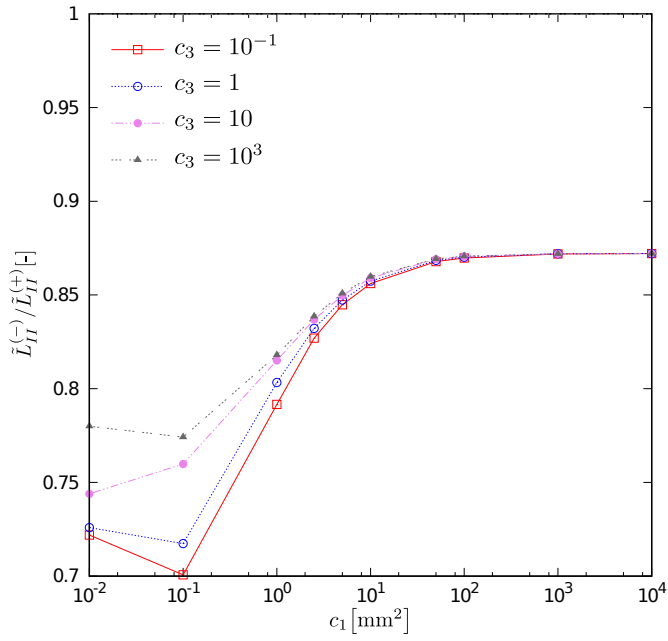
Abbildung 4.9.: Numerische Ergebnisse der Intensitätsfaktoren für Modus II

Der Einfluss der Materialparameter auf die Werte des Intensitätsfaktors \tilde{K}_{II} ist in den Abbildungen 4.9a und 4.9b ersichtlich. Diese Abbildungen sind ähnlich zu den entsprechenden Abbildungen 4.7a und 4.7b für Modus *I* und lassen analoge Schlussfolgerungen im Zusammenhang mit den Grenzübergängen von c_1 und c_3 zu. Für die Intensitätsfaktoren $\tilde{L}_{II}^{(+)}$ und $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ der Hyperspannung μ ist der Einfluss der Materialparameter c_1 und c_3 ebenfalls numerisch ermittelt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.9c und 4.9d dargestellt. Wiederum liegen analoge Verhältnisse zu denjenigen von Modus *I* vor (vergleiche hierzu die Abbildungen 4.7c und 4.7d). Daher erläutern wir diese nicht erneut, jedoch ist an dieser Stelle eine weitere Überlegung angebracht.

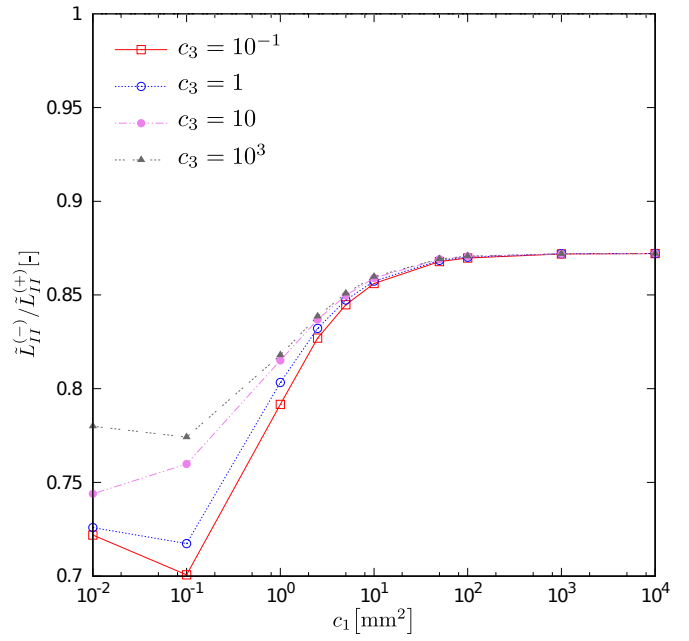
Aus der klassischen und mikropolaren Elastizität ist bekannt, dass die dortigen Intensitätsfaktoren von der Risslänge und von der angelegten äußeren Belastung abhängen. Es ist folglich von Interesse, das Verhältnis $\frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{\tilde{L}_{II}^{(+)}}$ auf mögliche Abhängigkeiten zu untersuchen. Ist dieses Verhältnis nur von den Materialparametern nicht aber von der Geometrie oder der Belastung abhängig, so könnte dem Rissspitzennahfeld der Hyperspannung μ ebenfalls ein einziger Intensitätsparameter \tilde{L}_{II} zugeordnet werden. Dies ist bei der Theorie mikropolarer Elastizität der Fall, bei der die Winkelfunktionen von den Materialparametern abhängen.

Generell gilt sowohl für klassische lineare Elastizität als auch für lineare mikropolare Elastizität, dass alle Terme nullter Ordnung in der asymptotischen Entwicklung bis auf einen einzigen Intensitätsfaktor durch die Randbedingungen an den Rissflanken und zusätzlich den Symmetriebedingungen bestimmt sind. Dies trifft auch für eine Modus-*I*-Belastung des hier betrachteten mikromorphen Modells sowie für das Rissspitzennahfeld der CAUCHYSchen Spannung Σ infolge einer Modus-*II*-Belastung zu. Das Rissspitzennahfeld der Hyperspannung μ für eine Modus-*II*-Belastung lässt sich jedoch mit Hilfe der Rand- und Symmetriebedingungen nur bis auf zwei Konstanten $\tilde{L}_{II}^{(+)}$ und $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ bestimmen. Dies war stillschweigend die Motivation, diese Konstanten als Intensitätsfaktoren zu bezeichnen.

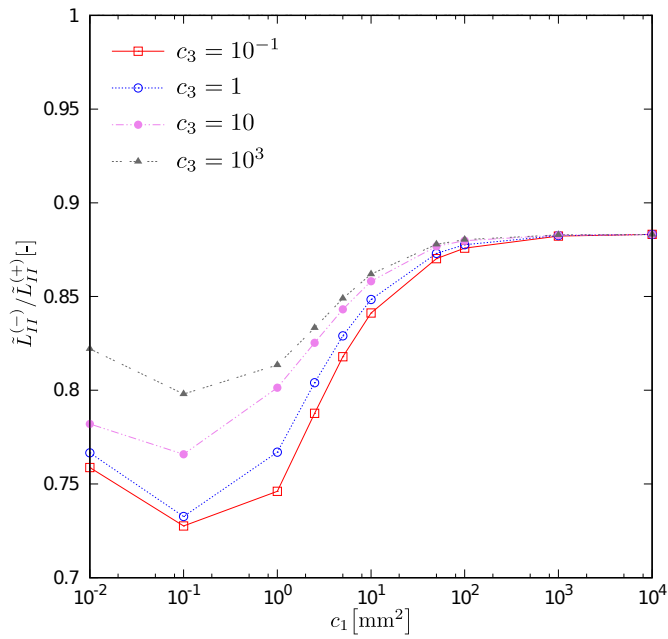
Die Verläufe in Abbildung 4.10a machen deutlich, dass das Verhältnis $\frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{\tilde{L}_{II}^{(+)}}$ auf jeden Fall materialparameterabhängig ist. Der Einfluss der angelegten Belastung und der Risslänge kann aus den Verläufen in den Abbildungen 4.10b – 4.10d entnommen werden. Bei konstant gehaltener äußerer Geometrie, das heißt konstanter Breite b und Höhe h des Materials, werden jeweils die äußere Belastung, die Risslänge oder beide gleichzeitig variiert. Offensichtlich sind die beiden Verläufe der einfachen äußeren Belastung in Abbildung 4.10a und der verdoppelten äußeren Belastung in Abbildung 4.10b deckungsgleich. Dies kann nur bedeuten, dass das Verhältnis $\frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{\tilde{L}_{II}^{(+)}}$ unabhängig von der aufgegebenen äußeren Belastung ist. In Abbildung 4.10c ist im Vergleich zu Abbildung 4.10a die doppelte Risslänge angenommen worden. Die jeweiligen Verläufe unterscheiden sich, was deutlich macht, dass das Verhältnis $\frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{\tilde{L}_{II}^{(+)}}$ von der gewählten Risslänge abhängt. Dies rechtfertigt sowohl $\tilde{L}_{II}^{(+)}$ als auch $\tilde{L}_{II}^{(-)}$ als unabhängige Intensitätsfaktoren anzusehen!



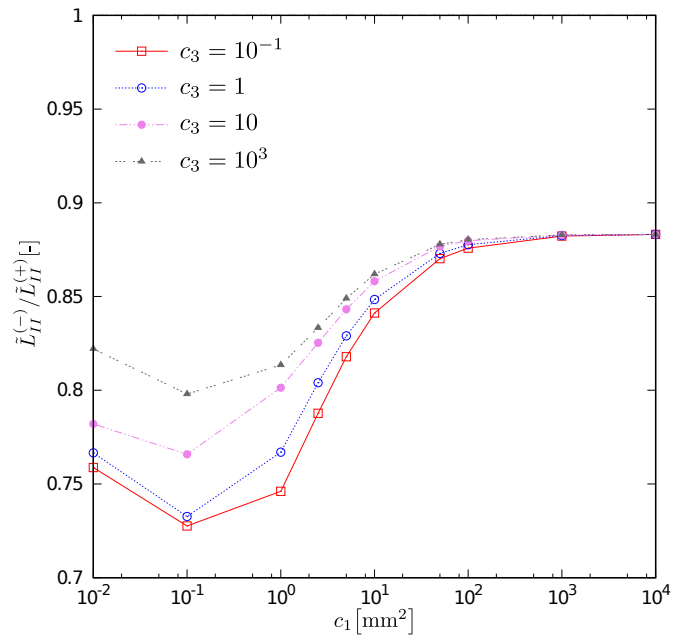
(a) Risslänge $a = 1$ mm, Randlast $\Sigma_{r\varphi} = 100$ GPa



(b) Risslänge $a = 1$ mm, Randlast $\Sigma_{r\varphi} = 200$ GPa



(c) Risslänge $a = 2$ mm, Randlast $\Sigma_{r\varphi} = 100$ GPa



(d) Risslänge $a = 2$ mm, Randlast $\Sigma_{r\varphi} = 200$ GPa

Abbildung 4.10.: Abhängigkeit des Quotienten $\frac{\tilde{L}_{II}^{(-)}}{\tilde{L}_{II}^{(+)}}$ vom Materialparameter c_1

4.4 Randriss im Zweistoffverbund

In Abbildung 4.11 ist ein Zweistoffverbund aus Material 1 und Material 2 zu sehen. In einem Abstand d von der Trennschicht befindet sich ein zur Trennschicht paralleler Riss der Länge a . Der Verbund wird auf Zug in der skizzierten Weise belastet. Vom Standpunkt des mikromorphen Kontinuums ist dieses Problem aus folgendem Grund von Interesse: Für hinreichend kleine Abstände d , die von der Größenordnung spezifischer innerer Längen des Materials 1 sind, können Längenskaleneffekte auftreten und dominant werden. Materialspezifische innere Längen können typische Wellenlängen des Materials oder der Substruktur wie beispielsweise Kornweiten, Moleküllängen oder ähnliche sein. Wir erwarten also in Abhängigkeit einer Variation des Abstands d Abweichungen von der klassischen Theorie, die nicht in der Lage ist, Längenskaleneffekte zu erfassen.

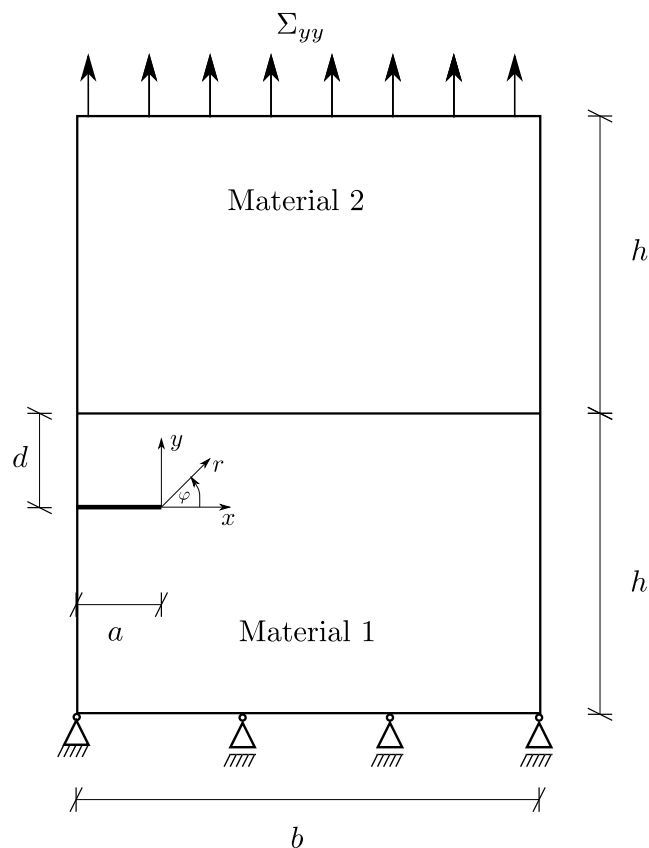


Abbildung 4.11.: Schematische Darstellung des Risses im Zweistoffverbund

Dieses Problem werden wir nur numerisch diskutieren. Da wir in den vorangegangenen Abschnitten die Güte des implementierten Finite-Elemente-Codes hinreichend überprüft und verifiziert haben, erwarten wir eine ebenfalls sehr gute Approximation der Verhältnisse dieses Problems. Für die Breite b und die Höhe h des Verbundes wählen wir $b = h = 10$ mm. Die Länge a des Risses wählen wir als $a = 1$ mm. Der Verbund wird, wie in Abbildung 4.12 skizziert, mit insgesamt 20.512 achtknotigen Elementen mit reduzierter Integration vernetzt. Die Umgebung der Risspitze wird analog dem homogenen Material in Abschnitt 4.3 vernetzt. In den Rechnungen wurden Risskonfigurationen mit den Abständen $\frac{d}{a} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1$ und 2 betrachtet.

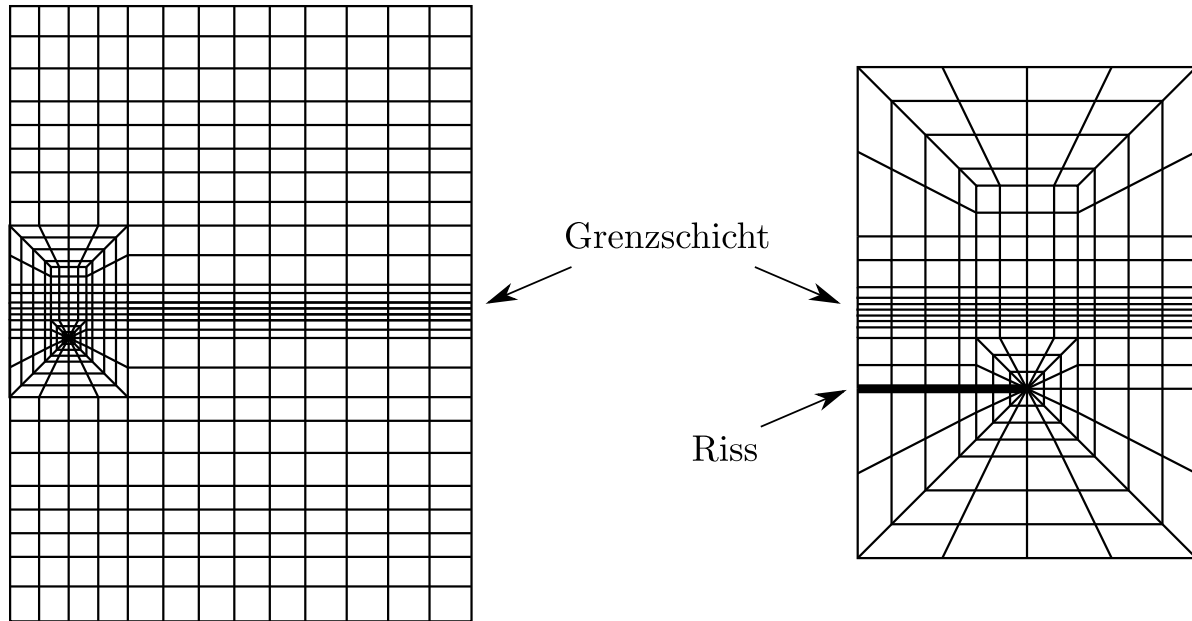


Abbildung 4.12.: Schematisches Netz des Risses im Zweistoffverbund

4.4.1 Randbedingungen und Materialeigenschaften

Wir erwarten Längenskaleneffekte hauptsächlich in Folge des Stoffverhaltens von Material 1, weil der Riss in diesem liegt. Deswegen wurde für Material 1 das in dieser Arbeit betrachtete mikromorphe Modell verwendet. Die Werte des YOUNG'schen Moduls E und der POISSON'schen Zahl ν wurden für Material 1 mit $E_1 = 100 \text{ GPa}$ und $\nu_1 = 0,3$ angenommen, wohingegen die nicht-klassischen Materialparameter c_1 und c_3 innerhalb von Parameterstudien variiert wurden. Für das Material 2 wurde hingegen ein klassisches, lineares, elastisches Materialverhalten mit $E_2 = 400 \text{ GPa}$ und $\nu_2 = 0,3$ angenommen. Somit ist für den Zweistoffverbund der Riss im weicheren Werkstoff modelliert.

Wegen der inhomogenen Verteilung der Materialeigenschaften entsteht für den Riss eine mehrmodale Beanspruchung bei einer äußeren Zugbelastung. Die Unterkante wird in vertikaler Richtung festgehalten und, um Starrkörperbewegungen zu verhindern, wird zusätzlich der linke Randknoten der Unterkante als horizontal unbeweglich angenommen:

$$u_y(x, y = d - 10 \text{ mm}) = 0, \quad u_x(x = -1 \text{ mm}, y = d - 10 \text{ mm}) = 0. \quad (4.52)$$

Auf die Oberkante wird in vertikaler Richtung eine Spannung $\Sigma_{yy} = 100 \text{ MPa}$ aufgebracht (vergleiche Abbildung 4.11). Alle restlichen Randbedingungen werden als lastfrei angenommen.

Der Effekt der angenommenen mikromorphen Elastizität für das Material 1 auf das Verhalten des Verbundes kann repräsentativ anhand der Werte der Intensitätsfaktoren für die CAUCHY'sche Spannung Σ diskutiert werden. In allen Beispielen wurden diese Faktoren wie für den Riss im homogenen Material durch eine Regressionsanalyse bestimmt.

4.4.2 Ergebnisse

Wir starten mit der Diskussion der Verläufe des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_I in den Abbildungen 4.13 – 4.15. Jede dieser Abbildungen entspricht einem konstanten Wert des nicht-klassischen Materialparameters $c_3 = \frac{1}{100}, 1, 100$. Die Spannungsintensitätsfaktoren \tilde{K}_I und K_I werden jeweils unter der Annahme mikromorpher beziehungsweise klassischer Elastizität für Material 1 ermittelt. Als weiteren Vergleich wird der Grenzwert

$$\tilde{K}_I^\infty := \lim_{d \rightarrow \infty} \tilde{K}_I \quad (4.53)$$

betrachtet. Dieser entspricht einem Riss in einem homogenen, mikromorphen, elastischen Material. Das linke Bild zeigt jeweils das Verhältnis $\frac{\tilde{K}_I}{K_I}$ als durch den Materialparameter c_1 parametrisierte Funktion von $\frac{d}{a}$ dargestellt. Damit wird die Abweichung zur klassischen Elastizität sichtbar. Es sei darauf hingewiesen, dass schon im homogenen Material diese Abweichung auftritt. Demzufolge besitzt jede einzelne Linie einen anderen Grenzwert für sehr große Abstände d . In dem Bild auf der rechten Seite ist jeweils das Verhältnis $\frac{\tilde{K}_I}{\tilde{K}_I^\infty}$ als durch den Materialparameter c_1 parametrisierte Funktion über $\frac{d}{a}$ aufgetragen. Zwangsläufig besitzen alle Kurven in diesen Bildern den Grenzwert 1 für sehr große Quotienten $\frac{d}{a}$. Diese Bilder machen den Einfluss der strukturspezifischen Länge d auf die Werte des Spannungsintensitätsfaktors \tilde{K}_I sichtbar. Zum Vergleich ist die entsprechende Linie für klassische Elastizität mit aufgetragen.

Für sehr kleine Werte des Materialparameters c_3 ist die Abweichung von der klassischen Elastizität verschwindend klein (siehe Abbildung 4.13, links). Der strukturgeometrische Faktor d übt, wie im rechten Bild von Abbildung 4.13 erkennbar ist, auf das Verhältnis $\frac{\tilde{K}_I}{\tilde{K}_I^\infty}$ denselben Einfluss wie im Falle klassischer Elastizität aus. Dies entspricht der Erwartung, da wir bereits die klassische, lineare Elastizität als Grenzfall $c_3 \rightarrow 0$ des hier vorgestellten mikromorphen Kontinuums erkannt haben. Hier spielen die Werte des Materialparameters c_1 allerdings kaum eine Rolle.

Im rechten Bild von Abbildung 4.14 ($c_3 = 1$) ist eine erkennbare Abweichung zur klassischen Elastizität vorhanden. Diese Abweichung hängt erheblich von den Werten des Materialparameters c_1 ab. Auch der Einfluss des Geometriefaktors d auf das Verhältnis $\frac{\tilde{K}_I}{\tilde{K}_I^\infty}$ in Abbildung 4.14 (rechts) hängt erheblich von c_1 ab. In diesem Bild ist kein einheitliches Verhalten der verschiedenen Verläufe zu beobachten. Jedoch ist deutlich zu erkennen, dass kleine Werte des Abstands d einen deutlich stärkeren Einfluss im Falle einer mikromorphen Elastizität ausüben als dies bei klassischer Elastizität der Fall ist. Dieser Trend setzt sich noch stärker für die Diskussion größerer Werte des Materialparameters c_3 fort, wie wir in Abbildung 4.15 erkennen können. Jedoch erscheinen die Verläufe in Abbildung 4.15 geordneter.

Insgesamt können wir schlussfolgern, dass die Abweichung von der klassischen Elastizität sowie der Einfluss auf den Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_I im Vergleich zum klassischen Wert K_I mit fallendem Abstand d zunimmt. Es gibt einen Übergangsbereich für c_3 in den rechten Bildern, innerhalb dem konkave Verläufe konvex werden. Die Verhältnisse für die zugehörigen Verläufe infolge des Modus-II-Anteils sind ähnlich zu denjenigen für Modus I und sind in den Abbildungen 4.16 – 4.18 zu sehen. Im rechten Bild in Abbildung 4.17 erkennen wir auch hier einen Übergangsbereich für $c_3 = 1$.

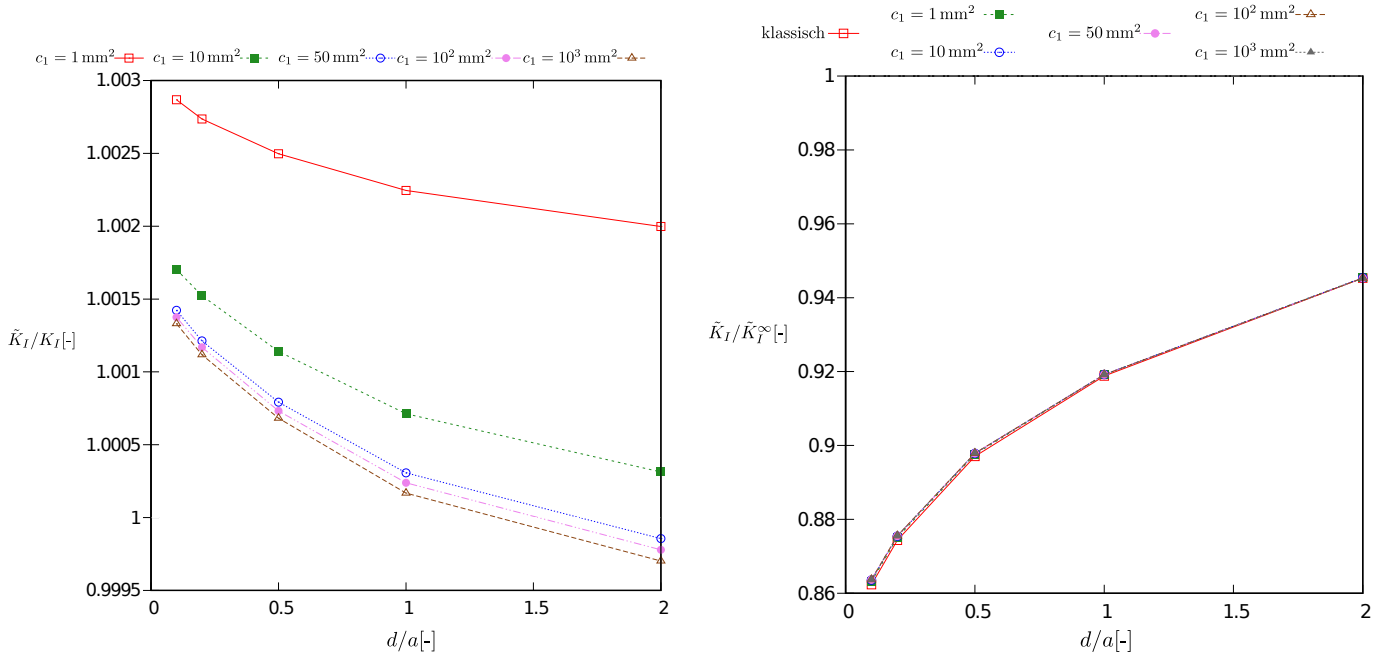


Abbildung 4.13.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_I im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_I beziehungsweise dem Wert K_I^∞ für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 10^{-2}$)

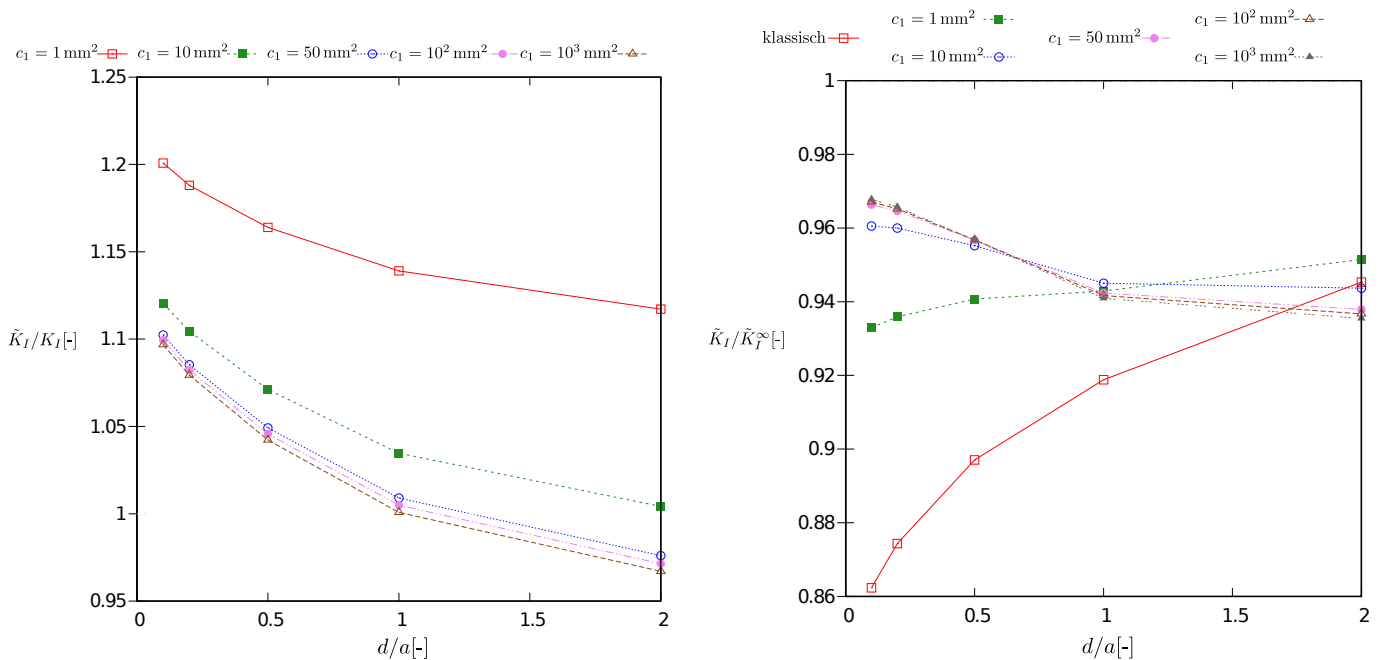


Abbildung 4.14.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_I im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_I beziehungsweise dem Wert K_I^∞ für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 1$)

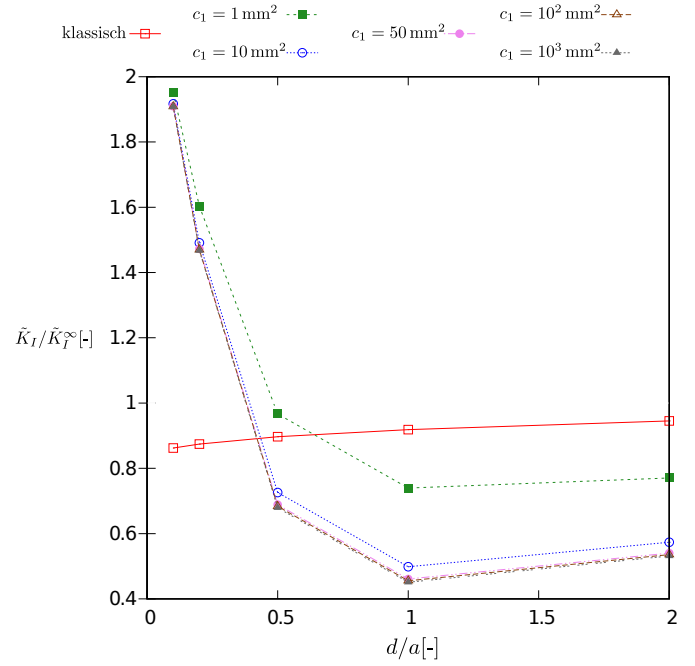
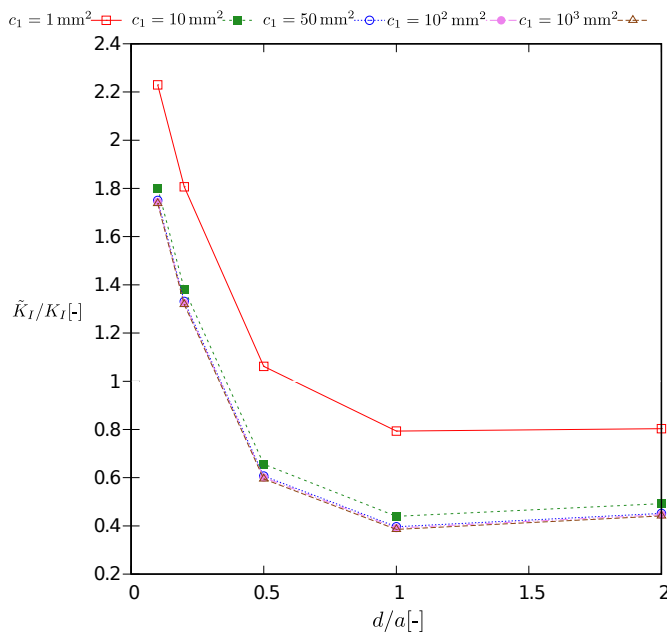


Abbildung 4.15.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_I im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_I beziehungsweise dem Wert K_I^∞ für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 10^2$)

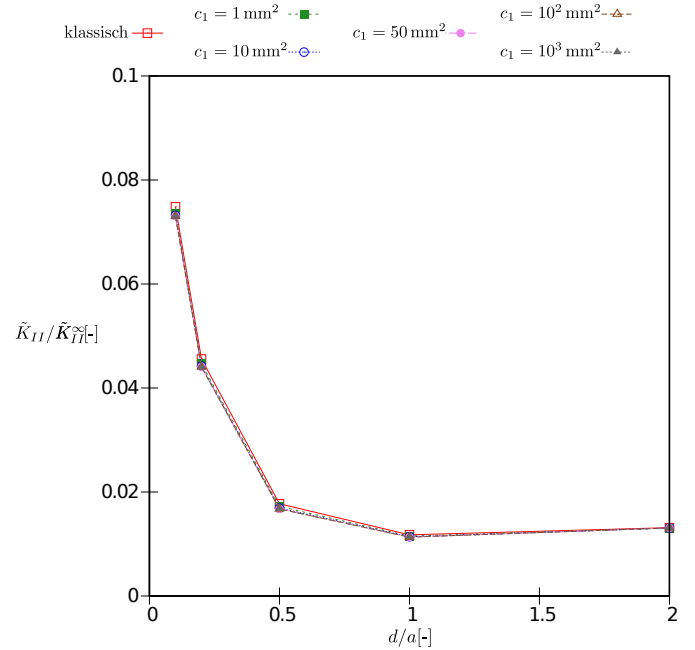
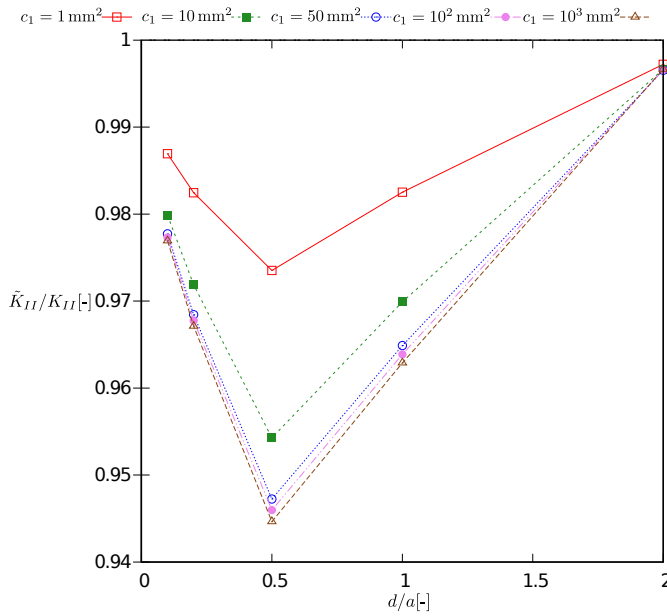


Abbildung 4.16.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_{II} im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_{II} beziehungsweise dem Wert K_{II}^∞ für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 10^{-2}$)

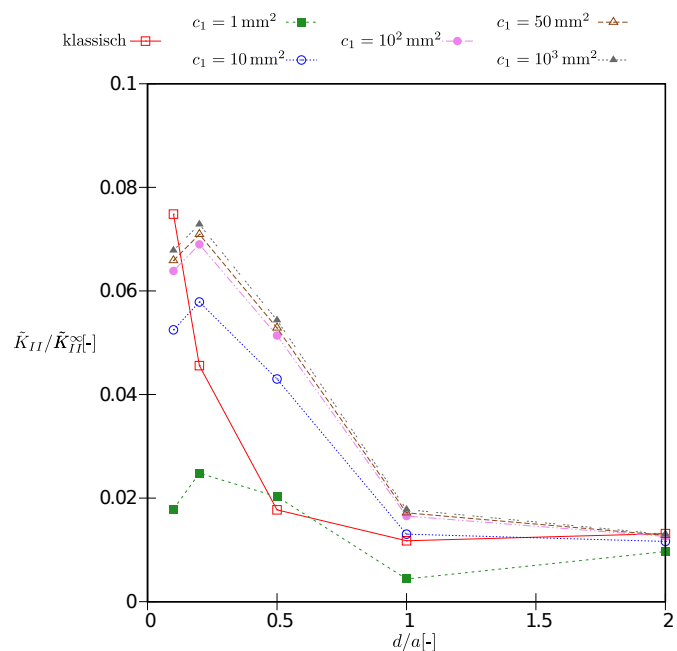
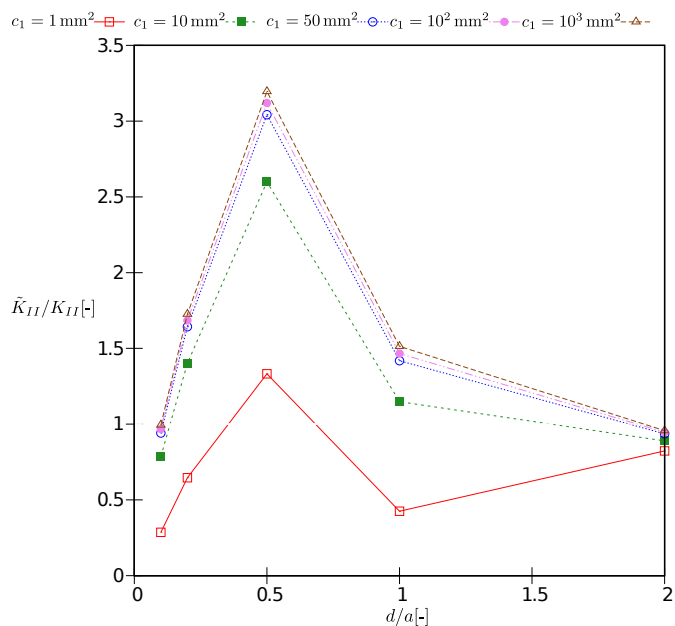


Abbildung 4.17.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_{II} im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_{II} beziehungsweise dem Wert K_{II}^{∞} für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 1$)

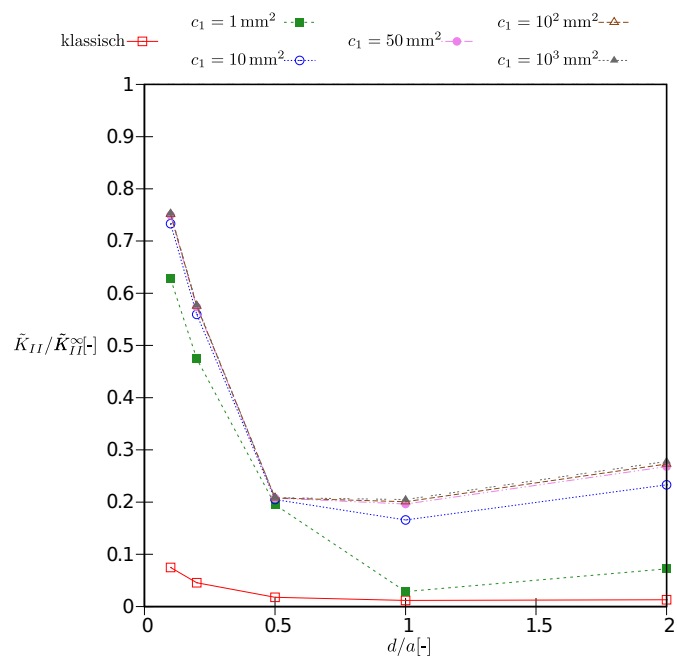
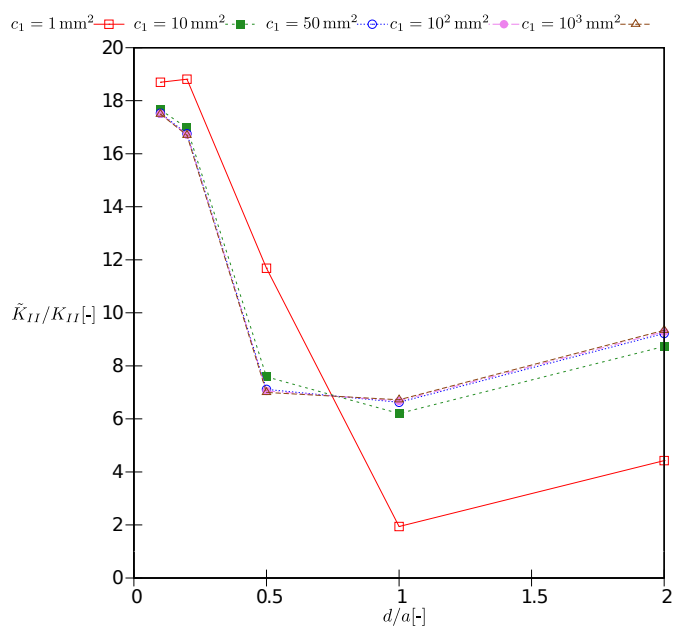


Abbildung 4.18.: Spannungsintensitätsfaktor \tilde{K}_{II} im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert K_{II} beziehungsweise dem Wert K_{II}^{∞} für $d = \infty$ in Abhängigkeit von $\frac{d}{a}$ ($c_3 = 10^2$)

5 Zusammenfassung

In vielen Anwendungen der Elastizität, in denen materialspezifische innere Längen einen maßgeblichen Einfluss zeigen, ist der Einsatz von nicht-klassischen Materialmodellen erforderlich. In solchen Fällen werden sogenannte Längenskaleneffekte im Materialverhalten beobachtet. Typische Beispiele dafür im Bauwesen sind das Stoffverhalten von Boden, Fels, Erdplatten, Betonumhüllungen von Tunneln, Klebverbindungen, Beschichtungen und weitere. Für eine adäquate Beschreibung solcher Aspekte sind die Modelle der mikromorphen Elastizität sehr geeignet. Das charakteristische Merkmal dieser nicht-klassischen Elastizität ist, dass die CAUCHYSche Spannung nicht mehr symmetrisch ist. In einer vollständig ausformulierten linearen, isotropen, mikromorphen Elastizität kommen insgesamt 18 klassische und nicht-klassische Materialparameter vor. Vom Standpunkt der praktischen Anwendungen ist es daher wichtig, Sonderfälle der mikromorphen Elastizitätsmodelle in Betracht zu ziehen, die weniger Materialparameter enthalten und auf symmetrische CAUCHYSche Spannungen führen.

Das in dieser Arbeit zugrunde gelegte Materialmodell der impliziten Gradientenelastizität lässt sich als Sonderfall der isotropen mikromorphen Elastizität herleiten. Dieses Modell scheint sehr attraktiv zu sein, weil es nur zwei klassische und zwei nicht-klassische Materialparameter enthält. Die Eigenschaften derartiger Modelle werden im Ingenieurwesen gewöhnlich unter Anwendung spezifischer Beanspruchungen untersucht. Hierzu gehören sowohl statische als auch dynamische Belastungen. Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung des zugrundegelegten Modells in Bezug auf Modus-I- sowie Modus-II-Beanspruchungen. Seit längerer Zeit ist der Eindruck in der Fachliteratur entstanden, dass dieses Modell in der Lage sei sowohl Dehnungs- als auch Spannungssingularitäten an Rissspitzen zu beheben. In der Arbeit wurde gezeigt, dass diese Ansicht schlichtweg falsch ist: Sowohl Dehnungs- als auch Spannungssingularitäten sind, wie im klassischen Fall, weiterhin an Rissspitzen vorhanden. Vom theoretischen Standpunkt aus ist bemerkenswert, dass die sogenannte Hyperspannung des Modells für Modus-II-Belastungen durch zwei Intensitätsfaktoren in der Nähe der Rissspitze darstellbar sind. Dies ist ein Novum sowohl in Bezug auf die klassische als auch auf die mikropolare Elastizität. Obwohl das betrachtete Modell nicht in der Lage ist, die erwähnten Singularitäten abzuschaffen, weist es erhebliche Unterschiede zu der klassischen Elastizität bei den Rissspitzenfeldern auf. Diese Unterschiede wurden sowohl analytisch als auch numerisch umfassend diskutiert. Die Untersuchungen bezogen sich sowohl auf homogene Materialien als auch auf einen Stoffverbund bestehend aus zwei Materialien. Der Verbund wurde hierbei als eine Kombination aus einem Material mit klassischen elastischen Eigenschaften und einem durch das in dieser Arbeit betrachtete Modell der mikromorphen Elastizität beschriebenen Material modelliert.



Literatur

- [1] H.-D. Alber, K. Hutter und Ch. Tsakmakis. *Nonconventional Thermodynamics, Indeterminate Couple Stress Elasticity and Heat Conduction*. In: *Continuum Mech. Thermodyn.* (2014). DOI: 10.1007/s00161-014-0406-1.
- [2] B.S. Altan und E.C. Aifantis. *On some Aspects in the special theory of gradient elasticity*. In: *Journal of the Mechanical Behavior of Materials* 8 (1997). DOI 10.1007/s00161-014-0406-1, S. 231–282.
- [3] B.S. Altan und E.C. Aifantis. *On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity*. In: *Scripta Metall. Mater.* 26 (1992), S. 319–324.
- [4] H. Askes und E.C. Aifantis. *Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results*. In: *Int. J. of Solids and Structures* 48 (2011), S. 1962–1990.
- [5] H. Askes und M.A. Gutiérrez. *Implicit gradient elasticity*. In: *Int. J. Num. Meth. Eng.* 67 (2006), S. 400–416.
- [6] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures: Second Edition*. Prentice Hall, 2014, S. 1043. ISBN: 978-0979004902.
- [7] W. Becker und D. Gross. *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer-Verlag, 2002, S. 200. DOI: 10.1007/978-3-642-56124-5.
- [8] C. Broese, Ch. Tsakmakis und D. Beskos. *Mindlin's micro-structural and gradient elasticities and their thermodynamics*. englisch. In: *J. of Elasticity* (2016). DOI: 10.1007/s10659-016-9572-7.
- [9] E. Diegele, R. Elsässer und Ch. Tsakmakis. *Linear micropolar elastic crack-tip fields under mixed mode loading conditions*. In: *Int. J. Fracture* 129 (2004), S. 309–339.
- [10] R. Elsässer. *Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 6709, PhD-Thesis. Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 2002.
- [11] A.C. Eringen. *Microcontinuum field theories: I. Foundations and Solids*. Springer Verlag, New York, 1999, S. 325. DOI: 10.1007/978-1-4612-0555-5.
- [12] A.C. Eringen. *Theory of micropolar elasticity*. In: *Fracture – An Advanced Treatise, Vol. I Microscopic and Macroscopic Fundamentals*. Academic Press, New York, 1968, S. 621–729.
- [13] A.C. Eringen und E.S. Suhubi. *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids–I*. In: *International Journal of Engineering Sciences* 2 (1964), S. 189–203.
- [14] N.A. Fleck u. a. *Strain gradient plasticity: Theory and experiment*. In: *Acta Metallurgica et Materialia* 42.2 (1994), S. 475–487. ISSN: 0956-7151. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90502-9](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90502-9).
- [15] H. Gao u. a. *Mechanism based strain gradient plasticity*. In: *J. Mech. Phys. Sol.* 47 (1999), S. 1239–1263.
- [16] H.G. Georgiadis. *The Mode III Crack Problem in Microstructured Solids Governed by Dipolar Gradient Elasticity: Static and Dynamic Analysis*. In: *J. of Applied Mechanics* 70 (2003), S. 517–530.
- [17] C. Geuzaine und J.-F. Remacle. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 1309–1331.

-
- [18] Robert L. Taylor & Sanjay Govindjee. *FEAP – – A Finite Element Analysis Program. Version 8.5 User Manual*. 2017.
- [19] D. Gross und T. Seelig. *Bruchmechanik – Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer Vieweg, 2016. DOI: 10.1007/978-3-662-46737-4.
- [20] M. Gutkin und E. Aifantis. *Dislocations in the theory of gradient elasticity*. In: *Scripta Materialia* 40 (1999), S. 559–566.
- [21] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. 2. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, S. 643.
- [22] K. Hellan. *Introduction to Fracture Mechanics*. McGraw-Hill, 1984, S. 302. ISBN: 978-0070280489.
- [23] D. Hofer. *Simulation von Größeneffekten mit mikromorphen Theorien*. Wissenschaftliche Berichte FZKA 6896. Forschungszentrum Karlsruhe, Technik und Umwelt, 2003.
- [24] Y. Huang u. a. *Mechanism-based strain gradient plasticity—II. Analysis*. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48.1 (2000), S. 99–128. ISSN: 0022-5096. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00022-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00022-8).
- [25] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil und Mechanical Engineering, 2000, S. 672. ISBN: 978-0486411811.
- [26] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers – With Applications to Continuum Mechanics*. 5. Aufl. Springer International Publishing, 2018. DOI: 10.1007/978-3-319-98806-1.
- [27] J.-H. Kim und G.H. Paulino. *T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: A unified approach using the interaction integral method*. In: *Computational Methods of Applied Mechanical Engineering* 192 (2003), S. 1463–1494.
- [28] M. Kuna. *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2010, S. 446. ISBN: 978-3-8348-1006-9.
- [29] M. Lazar, E. Agiasofitou und D. Polyzos. *On gradient enriched elasticity theories: A reply to „Comment on ‘On non-singular crack fields in Helmholtz type enriched elasticity theories’ “ and important theoretical aspects*. In: *arXiv:1504.00869* (2015).
- [30] M. Lazar und D. Polyzos. *On non-singular crack fields in Helmholtz type enriched elasticity theories*. In: *Int. J. of Solids and Structures* 62 (2015), S. 1–7.
- [31] A. Madeo u. a. *Incomplete traction boundary conditions in the Grioli-Koiter-Mindlin-Toupin indeterminate couple stress model*. In: *arXiv:1505.00995v1 [math-ph]* (2015).
- [32] R.D. Mindlin. *Micro-structure in linear elasticity*. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16 (1964), S. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
- [33] R.D. Mindlin und N.N. Eshel. *On First Strain-Gradient Theories in Linear Elasticity*. In: *Int. J. Solids Struct.* 4 (1968), S. 109–124.
- [34] S. Papargyri-Beskou, D. Polyzos und D.E. Beskos. *Wave dispersion in gradient elastic solids and structures: A unified treatment*. In: *Int. J. of Solids and Structures* 46 (2009), S. 3751–3759.
- [35] B. D. Reddy. *Introductory Functional Analysis*. Springer-Verlag New York, 1998, S. 472. DOI: 10.1007/978-1-4612-0575-3.
- [36] C. Ru und E.C. Aifantis. *A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity*. In: *Acta Mech.* 101 (1993), S. 59–68.
- [37] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente : Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*. 2. Aufl. Bd. 47. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik (LAMM). Teubner, Stuttgart, 1986. DOI: 10.1007/978-3-322-96758-9.

-
- [38] M.X. Shi u. a. *Non-existence of separable crack tip field in mechanism-based strain gradient plasticity*. In: *International Journal of Solids and Structures* 37.41 (2000), S. 5995–6010. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00217-6.
- [39] J.S. Stölken und A.G. Evans. *A microbend test method for measuring the plasticity length scale*. In: *Acta Materialia* 46 (1998), S. 5109–5115.
- [40] H. Tada, P.C. Paris und Irwin G. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Wiley, 2000, S. 698. DOI: 10.1115/1.801535.
- [41] M. L. Williams. *On the stress distribution at the base of a stationary crack*. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 109–114.
- [42] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [43] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The finite element method*. 4. Aufl. Bd. 1: The Basis. McGraw-Hill Book, London, 1989.
- [44] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The finite element method*. 4. Aufl. Bd. 2: Solid Mechanics. McGraw-Hill Book, London, 1991.



A Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

A.1 Grundbegriffe

Wir wollen die Grundlagen der Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zusammenfassen (siehe ITSKOV [26]). Wir starten vorerst mit einem kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) mit dem zugehörigen globalen Basissystem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. In diesem stellen wir den Ortsvektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ folgendermaßen dar:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X, t) = x_1(X, t) \mathbf{e}_1 + x_2(X, t) \mathbf{e}_2 + x_3(X, t) \mathbf{e}_3 . \quad (\text{A.1})$$

Drücken wir die Komponenten x_α durch ein Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) mit einem Radius r , einem Umfangswinkel φ und einer Höhe z aus, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$\mathbf{x} = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 . \quad (\text{A.2})$$

A.1.1 Basisvektoren

Die Basisvektoren \mathbf{g}_i des Zylinderkoordinatensystems (r, φ, z) ergeben sich wie folgt:

$$\mathbf{g}_r := (\partial_r \mathbf{x}) = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 , \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{g}_\varphi := (\partial_\varphi \mathbf{x}) = -r \sin \varphi \mathbf{e}_1 + r \cos \varphi \mathbf{e}_2 , \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{g}_z := (\partial_z \mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 . \quad (\text{A.5})$$

Im Gegensatz zum globalen kartesischen Basissystem $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ ist das Basissystem der Zylinderkoordinaten nur lokal definiert, d. h. die Richtung der Basisvektoren hängt vom betrachteten Punkt ab. Das zum Zylinderkoordinatenbasissystem $\{\mathbf{g}_\alpha\}$ reziproke Basissystem $\{\mathbf{g}^\beta\}$ wird durch die Bedingung $\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta$ definiert und besitzt folgende Darstellungen:

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{g}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2 , \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{g}^\varphi = \frac{1}{r^2} \mathbf{g}_\varphi = -\frac{\sin \varphi}{r} \mathbf{e}_1 + \frac{\cos \varphi}{r} \mathbf{e}_2 , \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{g}^z = \mathbf{g}_z = \mathbf{e}_3 . \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Metrikoeffizienten

Die Basisvektoren (A.3) – (A.5) und (A.6) – (A.8) induzieren eine Metrik $\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta = g^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta$, deren Komponenten – die sogenannten **Metrikoeffizienten** – die folgenden Werte annehmen:

$$[g_{\alpha\beta}] := [\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad [g^{\alpha\beta}] = [\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.9})$$

A.1.3 Physikalisches Basissystem

Das Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) besitzt, wie wir klar an den Metrikkoeffizienten erkennen, zwar ein orthogonales, aber kein orthonormales Basissystem. Normieren wir das Basissystem $\{\mathbf{g}_\alpha\}$ oder $\{\mathbf{g}^\beta\}$, so erhalten wir das sogenannte **physikalische Basissystem** $\{\mathbf{g}_{\langle\alpha\rangle}\} =: \{\mathbf{e}_i\}$ oder $\{\mathbf{g}^{\langle\beta\rangle}\} =: \{\mathbf{e}^j\} \equiv \{\mathbf{e}_j\}$:

$$\mathbf{e}_r := \mathbf{g}_{\langle r \rangle} := \frac{1}{\|\mathbf{g}_r\|} \mathbf{g}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{e}_\varphi := \mathbf{g}_{\langle \varphi \rangle} := \frac{1}{\|\mathbf{g}_\varphi\|} \mathbf{g}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{e}_z := \mathbf{g}_{\langle z \rangle} := \frac{1}{\|\mathbf{g}_z\|} \mathbf{g}_z = \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.12})$$

Ein weiterer Vorteil des physikalischen Basissystems ist, dass die induzierten Metrikkoeffizienten $g_{\langle\alpha\beta\rangle}$ dem KRONECKER-Delta δ_{ij} entsprechen und wir nicht zwischen ko- und kontravariant unterscheiden. Wir können mit Hilfe der Metrikkoeffizienten $g_{\alpha\beta}$ und $g^{\alpha\beta}$ die Komponenten eines Tensors bezüglich der Zylinderkoordinaten auf die induzierten Komponenten des physikalischen Basissystems transformieren. Wir geben diese Transformation exemplarisch an den Vektorkomponenten u_α sowie u^β an:

$$u_{\langle\alpha\rangle} = u_\alpha \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \iff u_\alpha = u_{\langle\alpha\rangle} \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}, \quad (\text{A.13})$$

$$u^{\langle\alpha\rangle} = u^\alpha \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}} \iff u^\alpha = u^{\langle\alpha\rangle} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}. \quad (\text{A.14})$$

Die Klammerung soll hierbei andeuten, dass wir keine Summationskonvention nutzen. Für einen Tensor höherer Stufe müssen wir jeden kovarianten beziehungsweise kontravarianten Index der Komponente bezüglich des Zylinderkoordinatensystems gemäß der Transformation (A.13) beziehungsweise (A.14) transformieren, das heißt wir erhalten ein Produkt mit mehreren Wurzeln aus Metrikkoeffizienten.

A.1.4 Christoffelsymbole

Die lokalen Basissysteme $\{\mathbf{g}_\alpha\}$ und $\{\mathbf{g}^\beta\}$ sind nicht konstant. Die partiellen Ableitungen lassen sich mit Hilfe der sogenannten **Christoffelsymbole** $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ auf den entsprechenden Tangentialraum projizieren:

$$(\partial_\alpha \mathbf{g}_\beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{g}_\gamma, \quad (\partial_\alpha \mathbf{g}^\beta) = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \mathbf{g}^\gamma \quad (\text{A.15})$$

Die Christoffelsymbole $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ lassen sich durch die Metrikkoeffizienten bestimmen:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left[(\partial_\alpha g_{\nu\beta}) + (\partial_\beta g_{\alpha\nu}) - (\partial_\nu g_{\alpha\beta}) \right]. \quad (\text{A.16})$$

Für das Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) verschwinden allerdings fast alle Christoffelsymbole:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^r = \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\varphi = \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^z = \Gamma_{\alpha\beta}^3 \equiv 0. \quad (\text{A.17})$$

A.1.5 Kovariante Ableitung

Da das lokale Basissystem der Zylinderkoordinaten (r, φ, z) nicht konstant ist, müssen wir einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff einführen: Die **kovariante Ableitung**. Diese berücksichtigt die Ableitung der Basisvektoren in der Komponente. Wir wollen auch hier exemplarisch die kovariante Ableitung einer kovarianten beziehungsweise kontravarianten Vektorkomponente angeben:

$$u_\alpha|_\beta := (\partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma, \quad u^\alpha|_\beta := (\partial_\beta u^\alpha) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma. \quad (\text{A.18})$$

Ähnlich wie bei der Situation der physikalischen Komponenten können wir die kovariante Ableitung einer beliebigen Tensorkomponente aus diesen beiden Definitionen gewinnen. Der Term proportional zum Christoffelsymbol muss für jeden kovarianten beziehungsweise kontravarianten Index subtrahiert beziehungsweise addiert werden. Für Tensoren zweiter Stufe T gilt beispielsweise

$$T_{\alpha\beta}|_\gamma = (\partial_\gamma T_{\alpha\beta}) - \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu T_{\nu\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\nu T_{\alpha\nu}, \quad T^{\alpha\beta}|_\gamma = (\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha T^{\nu\beta} + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta T^{\alpha\nu}. \quad (\text{A.19})$$

A.2 Gradient eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten

Der Gradient eines Tensors zweiter Stufe T ist als dyadisches Produkt des Nabla-Operators ∇ mit dem Tensor T definiert. Bezüglich Zylinderkoordinaten (r, φ, z) erhalten wir die Komponentendarstellung:

$$\text{grad}(T) \equiv \nabla T := \nabla \otimes T = \mathbf{g}^\alpha \otimes \partial_\alpha (T^{\beta\gamma} \mathbf{g}_\beta \otimes \mathbf{g}_\gamma) = T^{\beta\gamma}|_\alpha \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta \otimes \mathbf{g}_\gamma. \quad (\text{A.20})$$

Wir konzentrieren uns auf die Komponenten und beginnen mit der Definition der kovarianten Ableitung:

$$T^{\beta\gamma}|_\alpha = (\partial_\alpha T^{\beta\gamma}) + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T^{\nu\gamma} + \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma T^{\beta\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Als nächstes führen wir die Summation über ν explizit aus und erhalten:

$$T^{\beta\gamma}|_\alpha = (\partial_\alpha T^{\beta\gamma}) + \Gamma_{\alpha 1}^\beta T^{1\gamma} + \Gamma_{\alpha 2}^\beta T^{2\gamma} + \Gamma_{\alpha 1}^\gamma T^{\beta 1} + \Gamma_{\alpha 2}^\gamma T^{\beta 2}. \quad (\text{A.22})$$

Die besondere Struktur der Christoffelsymbole $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ (vgl. Gl. (A.17)) lässt uns weiter auswerten:

$$\begin{aligned} T^{\beta\gamma}|_\alpha &= (\partial_\alpha T^{\beta\gamma}) + \delta_\alpha^2 \delta_2^\beta \Gamma_{21}^2 T^{1\gamma} + (\delta_\alpha^1 \delta_2^\beta \Gamma_{12}^2 T^{2\gamma} + \delta_\alpha^2 \delta_1^\beta \Gamma_{22}^1 T^{2\gamma}) \\ &\quad + \delta_\alpha^2 \delta_2^\gamma \Gamma_{21}^2 T^{\beta 1} + (\delta_\alpha^1 \delta_2^\gamma \Gamma_{12}^2 T^{\beta 2} + \delta_\alpha^2 \delta_1^\gamma \Gamma_{22}^1 T^{\beta 2}). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} &= (\partial_\alpha T^{\beta\gamma}) + \frac{1}{r} (\delta_\alpha^2 \delta_2^\beta T^{1\gamma} + \delta_\alpha^1 \delta_2^\beta T^{2\gamma} + \delta_\alpha^2 \delta_2^\gamma T^{\beta 1} + \delta_\alpha^1 \delta_2^\gamma T^{\beta 2}) \\ &\quad - r (\delta_\alpha^2 \delta_1^\beta T^{2\gamma} + \delta_\alpha^2 \delta_1^\gamma T^{\beta 2}). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Da wir das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Modell in physikalischen Komponenten formulieren, führen wir nun die physikalischen Komponenten des Gradienten nach den Gln. (A.13) bzw. (A.14) ein:

$$(\nabla T)_{<\alpha>}^{<\beta\gamma>} = T^{\beta\gamma}|_{\alpha} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} &= (\partial_{\alpha} T^{\beta\gamma}) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} + \frac{1}{r} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\beta} T^{1\gamma} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\beta} T^{2\gamma} + \frac{1}{r} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{22}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\gamma} T^{\beta 1} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{22}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\gamma} T^{\beta 2} - r \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\beta} T^{2\gamma} \\ &\quad - r \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{11}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\gamma} T^{\beta 2}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Einsetzen der Werte $\sqrt{g_{11}} = \sqrt{g^{11}} = 1$, $\sqrt{g_{22}} = r$ bzw. $\sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r}$ liefert weiter:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{<\alpha>}^{<\beta\gamma>} &= (\partial_{\alpha} T^{\beta\gamma}) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} + \frac{1}{r} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\beta} T^{1\gamma} \\ &\quad + \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\beta} T^{2\gamma} + \frac{1}{r} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\gamma} T^{\beta 1} + \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\gamma} T^{\beta 2} \\ &\quad - \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\beta} T^{2\gamma} - \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\gamma} T^{\beta 2}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Als letzten Schritt transformieren wir die auftretenden Tensorkomponenten $T^{\beta\gamma} = T^{<\beta\gamma>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}}$:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{<\alpha>}^{<\beta\gamma>} &= \partial_{\alpha} \left[T^{<\beta\gamma>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \right] \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\beta} T^{<1\gamma>} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} + \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 1>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{11}} + \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^1 \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{22}} \\ &\quad - \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\beta} T^{<2\gamma>} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} - \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \delta_{\alpha}^2 \delta_1^{\gamma} T^{<\beta 2>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{22}} \\ &= (\partial_{\alpha} T^{<\beta\gamma>}) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} + T^{<\beta\gamma>} \left(\partial_{\alpha} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\beta\beta)}} \\ &\quad + T^{<\beta\gamma>} \left(\partial_{\alpha} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^1 \left(\delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^2 \left(\delta_2^{\beta} T^{<1\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 1>} - \delta_1^{\beta} T^{<2\gamma>} - \delta_1^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Ausnutzen der Abhängigkeiten der Metrikoeffizienten $g^{\alpha\beta} = \hat{g}^{\alpha\beta}(r)$ lässt uns weiter umformen:

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{<\alpha>}^{<\beta\gamma>} &= (\partial_{\alpha} T^{<\beta\gamma>}) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} + r \partial_r \left[\frac{1}{r} \right] \sqrt{g^{11}} \delta_{\alpha}^1 \left(\delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^1 \left(\delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} &\quad + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^2 \left(\delta_2^{\beta} T^{<1\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 1>} - \delta_1^{\beta} T^{<2\gamma>} - \delta_1^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right). \\ &= (\partial_{\alpha} T^{<\beta\gamma>}) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} - \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^1 \left(\delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^1 \left(\delta_2^{\beta} T^{<2\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_{\alpha}^2 \left(\delta_2^{\beta} T^{<1\gamma>} + \delta_2^{\gamma} T^{<\beta 1>} - \delta_1^{\beta} T^{<2\gamma>} - \delta_1^{\gamma} T^{<\beta 2>} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Verwenden wir die lateinischen Indizes i, j, k statt der physikalischen Indizes $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle, \langle \gamma \rangle$, so lauten die physikalischen Komponenten des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe in Abhängigkeit der physikalischen Komponenten des Tensors:

Allgemeine physikalische Komponenten des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe:

$$(\nabla T)_{ijk} = T_{jk}|_i = \sqrt{g^{(ii)}} (\partial_i T_{jk}) + \frac{1}{r} \delta_{i\varphi} (\delta_{j\varphi} T_{rk} + \delta_{k\varphi} T_{jr} - \delta_{jr} T_{\varphi k} - \delta_{kr} T_{j\varphi}) . \quad (\text{A.31})$$

Physikalische Komponenten:

$$(\nabla T)_{rrr} = (\partial_r T_{rr}) , \quad (\nabla T)_{\varphi rr} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{rr}) - T_{\varphi r} - T_{r\varphi}] , \quad (\nabla T)_{zrr} = (\partial_z T_{rr}) , \quad (\text{A.32})$$

$$(\nabla T)_{rr\varphi} = (\partial_r T_{r\varphi}) , \quad (\nabla T)_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{r\varphi}) + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}] , \quad (\nabla T)_{zr\varphi} = (\partial_z T_{r\varphi}) , \quad (\text{A.33})$$

$$(\nabla T)_{rrz} = (\partial_r T_{rz}) , \quad (\nabla T)_{\varphi rz} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{rz}) - T_{\varphi z}] , \quad (\nabla T)_{zrz} = (\partial_z T_{rz}) , \quad (\text{A.34})$$

$$(\nabla T)_{r\varphi r} = (\partial_r T_{\varphi r}) , \quad (\nabla T)_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{\varphi r}) + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}] , \quad (\nabla T)_{z\varphi r} = (\partial_z T_{\varphi r}) , \quad (\text{A.35})$$

$$(\nabla T)_{r\varphi\varphi} = (\partial_r T_{\varphi\varphi}) , \quad (\nabla T)_{\varphi\varphi\varphi} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}) + T_{r\varphi} + T_{\varphi r}] , \quad (\nabla T)_{z\varphi\varphi} = (\partial_z T_{\varphi\varphi}) , \quad (\text{A.36})$$

$$(\nabla T)_{r\varphi z} = (\partial_r T_{\varphi z}) , \quad (\nabla T)_{\varphi\varphi z} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{\varphi z}) + T_{rz}] , \quad (\nabla T)_{z\varphi z} = (\partial_z T_{\varphi z}) , \quad (\text{A.37})$$

$$(\nabla T)_{rzz} = (\partial_r T_{zz}) , \quad (\nabla T)_{\varphi zr} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{zr}) - T_{z\varphi}] , \quad (\nabla T)_{zzr} = (\partial_z T_{zr}) , \quad (\text{A.38})$$

$$(\nabla T)_{rzz} = (\partial_r T_{zz}) , \quad (\nabla T)_{\varphi zz} = \frac{1}{r} [(\partial_\varphi T_{zz}) + T_{zr}] , \quad (\nabla T)_{zz\varphi} = (\partial_z T_{z\varphi}) , \quad (\text{A.39})$$

$$(\nabla T)_{rzz} = (\partial_r T_{zz}) , \quad (\nabla T)_{\varphi zz} = \frac{1}{r} (\partial_\varphi T_{zz}) , \quad (\nabla T)_{zzz} = (\partial_z T_{zz}) . \quad (\text{A.40})$$

Tabelle A.1.: Physikalische Komponenten des Gradienten ∇T eines Tensors zweiter Stufe T

A.3 Divergenz eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten

Der Differentialoperator der Divergenz eines Tensors zweiter Stufe T ist als einfache Kontraktion des Nabla-Operators ∇ mit dem Tensor T definiert. Bezüglich Zylinderkoordinaten (r, φ, z) erhalten wir:

$$\operatorname{div}(T) := \nabla \cdot T = g^\gamma \cdot \partial_\gamma (T^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta) = T^{\alpha\beta} \big|_\gamma \delta_\alpha^\gamma g_\beta = T^{\alpha\beta} \big|_\alpha g_\beta . \quad (\text{A.41})$$

Die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe bezüglich des physikalischen Basissystems lautet andererseits:

$$\operatorname{div}[T] = (\operatorname{div}[T])^{<\beta>} e_{<\beta>} = T^{\alpha\beta} \big|_\alpha \sqrt{g_{(\beta\beta)}} e_{<\beta>} . \quad (\text{A.42})$$

Transformieren der Tensorkomponenten $T^{\alpha\beta} = T^{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}}$ liefert weiter:

$$(\operatorname{div}[T])^{<\beta>} = \left(T^{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \right) \big|_\alpha \sqrt{g_{(\beta\beta)}} . \quad (\text{A.43})$$

Die kovariante Ableitung $g^{\alpha\beta} \big|_\gamma$ der Metrikoeffizienten $g^{\alpha\beta}$ verschwindet, daher gilt:

$$(\operatorname{div}[T])^{<\beta>} = T^{<\alpha\beta>} \big|_\alpha \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} = T^{<\alpha\beta>} \big|_{<\alpha>} . \quad (\text{A.44})$$

Die Komponenten der Divergenz $\nabla \cdot T$ eines Tensors zweiter Stufe T bestimmen wir also durch eine einfache Kontraktion zweier Indizes der Komponenten des Gradienten ∇T . Daher können wir direkt die physikalischen Komponenten des Gradienten ∇T verwenden, um die entsprechenden physikalischen Komponenten der Divergenz $\nabla \cdot T$ zu bestimmen:

Allgemeine physikalische Komponenten der Divergenz eines Tensors zweiter Stufe:

$$(\nabla \cdot T)_i = T_{ji} \big|_j = \sqrt{g^{(jj)}} \left(\partial_j T_{ji} \right) + \frac{1}{r} \left(T_{ri} + \delta_{\varphi i} T_{\varphi r} - \delta_{ri} T_{\varphi\varphi} \right) . \quad (\text{A.45})$$

Radiale Komponente:

$$(\nabla \cdot T)_r = T_{jr} \big|_j = (\partial_r T_{rr}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi T_{\varphi r}) + (\partial_z T_{zr}) + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) \quad (\text{A.46})$$

Umfangskomponente:

$$(\nabla \cdot T)_\varphi = T_{j\varphi} \big|_j = (\partial_r T_{r\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}) + (\partial_z T_{z\varphi}) + \frac{1}{r} (T_{r\varphi} + T_{\varphi r}) . \quad (\text{A.47})$$

Komponente in Höhenrichtung:

$$(\nabla \cdot T)_z = T_{jz} \big|_j = (\partial_r T_{rz}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi T_{\varphi z}) + (\partial_z T_{zz}) + \frac{1}{r} T_{rz} . \quad (\text{A.48})$$

Tabelle A.2.: Physikalische Komponenten der Divergenz $\nabla \cdot T$ eines Tensors zweiter Stufe T

A.4 Gradient des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten

Um den Gradienten des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe T bezüglich Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zu bestimmen, wenden wir die Definition des Gradienten doppelt an und erhalten:

$$\text{grad}(\text{grad}(T)) := \nabla \otimes (\nabla \otimes T) = T^{\alpha\beta} \Big|_{\gamma\gamma} \mathbf{g}^\gamma \otimes \mathbf{g}^\nu \otimes \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta . \quad (\text{A.49})$$

Doppelpotes nutzen der Definition (A.19) der kovarianten Ableitung einer Tensorkomponente $T^{\alpha\beta}$ liefert:

$$T^{\alpha\beta} \Big|_{\gamma\gamma} = \left[(\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta T^{\alpha\zeta} \right] \Big|_\gamma \quad (\text{A.50})$$

$$= \partial_\gamma \left[(\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta T^{\alpha\zeta} \right] + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \left[(\partial_\gamma T^{\omega\beta}) + \Gamma_{\gamma\zeta}^\omega T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta T^{\omega\zeta} \right] \\ + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \left[(\partial_\gamma T^{\alpha\omega}) + \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha T^{\zeta\omega} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\omega T^{\alpha\zeta} \right] - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \left[(\partial_\omega T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\omega\zeta}^\alpha T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\omega\zeta}^\beta T^{\alpha\zeta} \right] \quad (\text{A.51})$$

$$= (\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha) T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha (\partial_\gamma T^{\zeta\beta}) + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta) T^{\alpha\zeta} + \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha\zeta}) \\ + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha (\partial_\gamma T^{\omega\beta}) + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma\zeta}^\omega T^{\zeta\beta} + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma\zeta}^\beta T^{\omega\zeta} + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha\omega}) + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma\zeta}^\alpha T^{\zeta\omega} \\ + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma\zeta}^\omega T^{\alpha\zeta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega (\partial_\omega T^{\alpha\beta}) - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega\zeta}^\alpha T^{\zeta\beta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega\zeta}^\beta T^{\alpha\zeta} . \quad (\text{A.52})$$

Wir lösen die Summationen nacheinander auf und beginnen mit der Summation über ζ und beachten dabei direkt, dass die Christoffelsymbole verschwinden, wenn einer der Indizes den Wert 3 annimmt:

$$T^{\alpha\beta} \Big|_{\gamma\gamma} = (\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\alpha) T^{1\beta} + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\alpha) T^{2\beta} + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha (\partial_\gamma T^{1\beta}) + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha (\partial_\gamma T^{2\beta}) \\ + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\beta) T^{\alpha 1} + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\beta) T^{\alpha 2} + \Gamma_{\gamma 1}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 1}) + \Gamma_{\gamma 2}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 2}) + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha (\partial_\gamma T^{\omega\beta}) \\ + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma 1}^\omega T^{1\beta} + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^\omega T^{2\beta} + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma 1}^\beta T^{\omega 1} + \Gamma_{\gamma\omega}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^\beta T^{\omega 2} + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha\omega}) \\ + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma 1}^\alpha T^{\omega 1} + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^\alpha T^{\omega 2} + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma 1}^\omega T^{\alpha 1} + \Gamma_{\gamma\omega}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^\omega T^{\alpha 2} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega (\partial_\omega T^{\alpha\beta}) \\ - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega 1}^\alpha T^{1\beta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega 2}^\alpha T^{2\beta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega 1}^\beta T^{\alpha 1} - \Gamma_{\gamma\gamma}^\omega \Gamma_{\omega 2}^\beta T^{\alpha 2} . \quad (\text{A.53})$$

Als nächstes betrachten wir den Index ω , lösen die Summation explizit auf und berücksichtigen dabei, dass die Christoffelsymbole nur für drei Indexkombinationen nicht verschwinden:

$$T^{\alpha\beta} \Big|_{\gamma\gamma} = (\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\alpha) T^{1\beta} + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\alpha) T^{2\beta} + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha (\partial_\gamma T^{1\beta}) + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha (\partial_\gamma T^{2\beta}) \\ + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\beta) T^{\alpha 1} + (\partial_\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\beta) T^{\alpha 2} + \Gamma_{\gamma 1}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 1}) + \Gamma_{\gamma 2}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 2}) + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha (\partial_\gamma T^{1\beta}) \\ + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha (\partial_\gamma T^{2\beta}) + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha \Gamma_{\gamma 1}^2 T^{1\beta} + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^1 T^{2\beta} + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^2 T^{2\beta} + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha \Gamma_{\gamma 1}^1 T^{11} \\ + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha \Gamma_{\gamma 1}^\beta T^{21} + \Gamma_{\gamma 1}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^\beta T^{12} + \Gamma_{\gamma 2}^\alpha \Gamma_{\gamma 2}^\beta T^{22} + \Gamma_{\gamma 1}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 1}) + \Gamma_{\gamma 2}^\beta (\partial_\gamma T^{\alpha 2}) \\ + \Gamma_{\gamma 1}^\beta \Gamma_{\gamma 1}^\alpha T^{11} + \Gamma_{\gamma 2}^\beta \Gamma_{\gamma 1}^\alpha T^{12} + \Gamma_{\gamma 1}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^\alpha T^{21} + \Gamma_{\gamma 2}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^\alpha T^{22} + \Gamma_{\gamma 2}^\beta \Gamma_{\gamma 1}^2 T^{\alpha 1} \\ + \Gamma_{\gamma 1}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^1 T^{\alpha 2} + \Gamma_{\gamma 2}^\beta \Gamma_{\gamma 2}^2 T^{\alpha 2} - \Gamma_{\gamma\gamma}^1 (\partial_1 T^{\alpha\beta}) - \Gamma_{\gamma\gamma}^2 (\partial_2 T^{\alpha\beta}) - \Gamma_{\gamma\gamma}^2 \Gamma_{21}^\alpha T^{1\beta} \\ - \Gamma_{\gamma\gamma}^1 \Gamma_{12}^\alpha T^{2\beta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^2 \Gamma_{22}^\alpha T^{2\beta} - \Gamma_{\gamma\gamma}^2 \Gamma_{21}^\beta T^{\alpha 1} - \Gamma_{\gamma\gamma}^1 \Gamma_{12}^\beta T^{\alpha 2} - \Gamma_{\gamma\gamma}^2 \Gamma_{22}^\beta T^{\alpha 2} . \quad (\text{A.54})$$

Nun können wir die Struktur der Christoffelsymbole aus Gl. (A.17) endgültig berücksichtigen:

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}|_{\nu\gamma} = & (\partial_{\gamma\nu} T^{\alpha\beta}) + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_1 \Gamma_{21}^2) T^{1\beta} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha (\partial_1 \Gamma_{12}^2) T^{2\beta} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_1^\alpha (\partial_1 \Gamma_{22}^1) T^{2\beta} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_1 \Gamma_{21}^2) T^{1\beta} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_1 \Gamma_{12}^2) T^{2\beta} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha (\partial_1 \Gamma_{22}^1) T^{2\beta} \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\beta (\partial_1 \Gamma_{21}^2) T^{\alpha 1} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^1 \delta_2^\beta (\partial_1 \Gamma_{12}^2) T^{\alpha 2} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_1^\beta (\partial_1 \Gamma_{22}^1) T^{\alpha 2} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\beta (\partial_1 \Gamma_{21}^2) T^{\alpha 1} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\beta (\partial_1 \Gamma_{12}^2) T^{\alpha 2} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\beta (\partial_1 \Gamma_{22}^1) T^{\alpha 2} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_\nu T^{1\beta}) + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_\nu T^{2\beta}) + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha (\partial_\nu T^{2\beta}) \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{1\beta} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 T^{1\beta} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{2\beta} \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{2\beta} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 T^{2\beta} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 T^{11} \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{21} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 T^{21} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 T^{12} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{12} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 T^{22} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 T^{22} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 T^{22} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^1 T^{22} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\beta (\partial_\nu T^{\alpha 1}) \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\beta (\partial_\nu T^{\alpha 2}) + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\beta (\partial_\nu T^{\alpha 2}) + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 T^{11} \\
& + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{12} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 T^{12} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 T^{21} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{21} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 T^{22} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 T^{22} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 T^{22} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^1 T^{22} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{\alpha 1} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 T^{\alpha 1} + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{\alpha 2} + \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 T^{\alpha 2} \\
& + \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 T^{\alpha 2} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_1 T^{\alpha\beta}) - \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha (\partial_2 T^{\alpha\beta}) \\
& - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha (\partial_2 T^{\alpha\beta}) - \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{1\beta} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 T^{1\beta} \\
& - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 T^{2\beta} - \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 T^{2\beta} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{2\beta} \\
& - \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 T^{\alpha 1} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 T^{\alpha 1} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 T^{\alpha 2} \\
& - \delta_\gamma^1 \delta_\nu^2 \delta_2^\alpha \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 T^{\alpha 2} - \delta_\gamma^2 \delta_\nu^1 \delta_2^\alpha \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 T^{\alpha 2} .
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Wir setzen die Werte der Christoffelsymbole ein und sortieren nach den Komponenten und erhalten:

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}|_{\nu\gamma} = & (\partial_{\gamma\nu} T^{\alpha\beta}) + r \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 (\partial_1 T^{\alpha\beta}) - \frac{1}{r} [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] (\partial_2 T^{\alpha\beta}) + \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^2 (\partial_\nu T^{\alpha 1}) \\
& + \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^2 (\partial_\nu T^{\alpha 1}) - \left[r \delta_1^\beta \delta_\gamma^2 - \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 \right] (\partial_\nu T^{\alpha 2}) - \left[r \delta_1^\beta \delta_\gamma^2 - \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 \right] (\partial_\gamma T^{\alpha 2}) \\
& + \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^2 (\partial_\nu T^{1\beta}) + \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^2 (\partial_\gamma T^{1\beta}) - \left[r \delta_1^\alpha \delta_\gamma^2 - \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 \right] (\partial_\nu T^{2\beta}) \\
& - \left[r \delta_1^\alpha \delta_\gamma^2 - \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 \right] (\partial_\gamma T^{2\beta}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] T^{\alpha 1} - \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 T^{\alpha 1} \\
& - \frac{1}{r^2} [r^2 \delta_1^\alpha \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 + \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_2^\alpha \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] T^{1\beta} + \frac{2}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 T^{11} \\
& + \frac{2}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 T^{22} - \delta_1^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^2 \delta_\gamma^1 + \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2] T^{22} - \delta_2^\alpha \delta_1^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] T^{22} \\
& + 2r^2 \delta_1^\alpha \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 T^{22} + \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] T^{12} - 2\delta_2^\alpha \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 T^{12} \\
& + \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^2 \delta_\gamma^1 + \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2] T^{21} - 2\delta_1^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 T^{21} .
\end{aligned}$$

Nun führen wir die physikalischen Komponenten nach den Gln. (A.13) bzw. (A.14) ein. Wir verwenden dabei die auftretenden KRONECKER-Deltas, um so viele Indizes wie möglich konkret anzugeben:

$$\begin{aligned}
T^{<\alpha\beta>}|_{<\nu\gamma>} &= T^{\alpha\beta}|_{\nu\gamma} \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)} g^{(\nu\nu)} g^{(\gamma\gamma)}} \\
&= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)} g^{(\nu\nu)} g^{(\gamma\gamma)}} (\partial_{\gamma\nu} T^{\alpha\beta}) \\
&\quad + r \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 g^{22} \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)}} (\partial_1 T^{\alpha\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{r} [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{(\beta\beta)} g^{11} g^{22}} (\partial_2 T^{\alpha\beta}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{22} g^{(\nu\nu)} g^{22}} (\partial_\nu T^{\alpha 1}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\nu^2 \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{22} g^{22} g^{(\gamma\gamma)}} (\partial_\gamma T^{\alpha 1}) \\
&\quad - \left[r \delta_1^\beta \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{11} g^{22}} - \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 \sqrt{g_{22} g^{11}} \right] \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g^{(\nu\nu)}} (\partial_\nu T^{\alpha 2}) \\
&\quad - \left[r \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \sqrt{g_{11} g^{22}} - \frac{1}{r} \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \sqrt{g_{22} g^{11}} \right] \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g^{(\gamma\gamma)}} (\partial_\gamma T^{\alpha 2}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{22} g_{(\beta\beta)} g^{(\nu\nu)} g^{22}} (\partial_\nu T^{1\beta}) \\
&\quad + \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\nu^2 \sqrt{g_{22} g_{(\beta\beta)} g^{22} g^{(\gamma\gamma)}} (\partial_\gamma T^{1\beta}) \\
&\quad - \left[r \delta_1^\alpha \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{11} g^{22}} - \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 \sqrt{g_{22} g^{11}} \right] \sqrt{g_{(\beta\beta)} g^{(\nu\nu)}} (\partial_\nu T^{2\beta}) \\
&\quad - \left[r \delta_1^\alpha \delta_\nu^2 \sqrt{g_{11} g^{22}} - \frac{1}{r} \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 \sqrt{g_{22} g^{11}} \right] \sqrt{g_{(\beta\beta)} g^{(\gamma\gamma)}} (\partial_\gamma T^{2\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{22} g^{11} g^{22}} T^{\alpha 1} \\
&\quad - \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{11} g^{22} g^{22}} T^{\alpha 1} \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left[r^2 \delta_1^\alpha \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{11} g^{22} g^{22}} + \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{22} g^{11} g^{22}} + \delta_2^\alpha \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1 \sqrt{g_{22} g^{22} g^{11}} \right] \\
&\quad \quad \sqrt{g_{(\beta\beta)}} T^{1\beta} \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{22} g_{22} g^{22} g^{22}} T^{11} \\
&\quad + \frac{2}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \delta_\gamma^1 \sqrt{g_{22} g_{22} g^{11} g^{11}} T^{22} \\
&\quad - \delta_1^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^2 \delta_\gamma^1 + \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2] \sqrt{g_{11} g_{22} g^{22} g^{11}} T^{22} \\
&\quad - \delta_2^\alpha \delta_1^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] \sqrt{g_{22} g_{11} g^{11} g^{22}} T^{22} \\
&\quad + 2 r^2 \delta_1^\alpha \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{11} g_{11} g^{22} g^{22}} T^{22} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^1 \delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2 \delta_\gamma^1] \sqrt{g_{22} g_{22} g^{11} g^{22}} T^{12} \\
&\quad - 2 \delta_2^\alpha \delta_1^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{22} g_{11} g^{22} g^{22}} T^{12} \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta [\delta_\nu^2 \delta_\gamma^1 + \delta_\nu^1 \delta_\gamma^2] \sqrt{g_{22} g_{22} g^{22} g^{11}} T^{21} \\
&\quad - 2 \delta_1^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^2 \delta_\gamma^2 \sqrt{g_{11} g_{22} g^{22} g^{22}} T^{21} .
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Wir können die auftretenden Metrikkoeffizienten einsetzen und gewinnen folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
T^{<\alpha\beta>}|_{<\nu\gamma>} = & \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}g^{(\nu\nu)}g^{(\gamma\gamma)}}(\partial_{\gamma\nu}T^{\alpha\beta}) \\
& + \frac{1}{r}\delta_\nu^2\delta_\gamma^2\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}(\partial_1T^{\alpha\beta}) \\
& - \frac{1}{r^2}[\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 + \delta_\nu^2\delta_\gamma^1]\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{(\beta\beta)}}(\partial_2T^{\alpha\beta}) \\
& + \frac{1}{r}\delta_2^\beta\delta_\gamma^2\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g^{(\nu\nu)}}(\partial_\nu T^{\alpha 1}) \\
& + \frac{1}{r}\delta_2^\beta\delta_\nu^2\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g^{(\gamma\gamma)}}(\partial_\gamma T^{\alpha 1}) \\
& + \frac{1}{r}\delta_2^\alpha\delta_\nu^2\sqrt{g_{(\beta\beta)}g^{(\gamma\gamma)}}(\partial_\gamma T^{1\beta}) \\
& + \frac{1}{r}\delta_2^\alpha\delta_\gamma^2\sqrt{g_{(\beta\beta)}g^{(\nu\nu)}}(\partial_\nu T^{1\beta}) \\
& - [\delta_1^\beta\delta_\gamma^2 - \delta_2^\beta\delta_\gamma^1]\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g^{(\nu\nu)}}(\partial_\nu T^{\alpha 2}) \\
& - [\delta_1^\beta\delta_\nu^2 - \delta_2^\beta\delta_\nu^1]\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g^{(\gamma\gamma)}}(\partial_\gamma T^{\alpha 2}) \\
& - [\delta_1^\alpha\delta_\gamma^2 - \delta_2^\alpha\delta_\gamma^1]\sqrt{g_{(\beta\beta)}g^{(\nu\nu)}}(\partial_\nu T^{2\beta}) \\
& - [\delta_1^\alpha\delta_\nu^2 - \delta_2^\alpha\delta_\nu^1]\sqrt{g_{(\beta\beta)}g^{(\gamma\gamma)}}(\partial_\gamma T^{2\beta}) \\
& - \frac{1}{r^2}[\delta_2^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 + \delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^1 + \delta_1^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^2]\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}}T^{\alpha 1} \\
& - \frac{1}{r^2}[\delta_1^\alpha\delta_\nu^2\delta_\gamma^2 + \delta_2^\alpha\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 + \delta_2^\alpha\delta_\nu^2\delta_\gamma^1]\sqrt{g_{(\beta\beta)}}T^{1\beta} \\
& + \frac{2}{r^2}\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^2T^{11} \\
& + [2\delta_1^\alpha\delta_1^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^2 - \delta_1^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^1 - \delta_1^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 \\
& \quad + 2\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^1 - \delta_2^\alpha\delta_1^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 - \delta_2^\alpha\delta_1^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^1]T^{22} \\
& + \frac{1}{r}\delta_2^\alpha[\delta_2^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 + \delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^1 - 2\delta_1^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^2]T^{12} \\
& + \frac{1}{r}[\delta_2^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^1\delta_\gamma^2 + \delta_2^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^1 - 2\delta_1^\alpha\delta_2^\beta\delta_\nu^2\delta_\gamma^2]T^{21}.
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Für die auftretenden ersten Ableitungen nutzen wir die Transformation $T^{\alpha\beta} = T_{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)} g^{(\beta\beta)}}$:

$$(\partial_\gamma T^{\alpha\beta}) = \partial_\gamma [T_{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}}] \quad (\text{A.59})$$

$$= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha\beta>}) + (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<\alpha\beta>} + \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) T_{<\alpha\beta>} \quad (\text{A.60})$$

$$= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<2\beta>} - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} T_{<\alpha 2>}. \quad (\text{A.61})$$

Explizit ergeben sich daraus die folgenden ersten partiellen Ableitungen:

$$(\partial_1 T^{\alpha\beta}) = \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_1 T_{<\alpha\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<2\beta>} - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} T_{<\alpha 2>}, \quad (\text{A.62})$$

$$(\partial_2 T^{\alpha\beta}) = \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_2 T_{<\alpha\beta>}), \quad (\text{A.63})$$

$$(\partial_\nu T^{\alpha 1}) = \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\nu T_{<\alpha 1>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 T_{<21>}, \quad (\text{A.64})$$

$$(\partial_\gamma T^{\alpha 1}) = \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha 1>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 T_{<21>}, \quad (\text{A.65})$$

$$(\partial_\nu T^{\alpha 2}) = \frac{1}{r} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\nu T_{<\alpha 2>}) - \frac{1}{r^3} \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 T_{<22>} - \frac{1}{r^2} \delta_\nu^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} T_{<\alpha 2>}, \quad (\text{A.66})$$

$$(\partial_\gamma T^{\alpha 2}) = \frac{1}{r} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha 2>}) - \frac{1}{r^3} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 T_{<22>} - \frac{1}{r^2} \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} T_{<\alpha 2>}, \quad (\text{A.67})$$

$$(\partial_\nu T^{1\beta}) = \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\nu T_{<1\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \delta_\nu^1 T_{<12>}, \quad (\text{A.68})$$

$$(\partial_\gamma T^{1\beta}) = \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<1\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 T_{<12>}, \quad (\text{A.69})$$

$$(\partial_\nu T^{2\beta}) = \frac{1}{r} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\nu T_{<2\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_\nu^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<2\beta>} - \frac{1}{r^3} \delta_2^\beta \delta_\nu^1 T_{<22>}, \quad (\text{A.70})$$

$$(\partial_\gamma T^{2\beta}) = \frac{1}{r} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<2\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<2\beta>} - \frac{1}{r^3} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 T_{<22>}. \quad (\text{A.71})$$

Weiter erhalten wir die zweiten partiellen Ableitungen in Abhängigkeit der physikalischen Komponenten:

$$\begin{aligned} (\partial_{\nu\gamma} T^{\alpha\beta}) &= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_{\nu\gamma} T_{<\alpha\beta>}) + (\partial_\nu \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha\beta>}) \\ &\quad + \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\nu \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) (\partial_\gamma T_{<\alpha\beta>}) + (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\nu T_{<\alpha\beta>}) \\ &\quad + T_{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_{\nu\gamma} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) + (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) (\partial_\nu \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) T_{<\alpha\beta>} \\ &\quad + \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) (\partial_\nu T_{<\alpha\beta>}) + (\partial_\nu \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}}) (\partial_\gamma \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) T_{<\alpha\beta>} \\ &\quad + \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_{\nu\gamma} \sqrt{g^{(\beta\beta)}}) T_{<\alpha\beta>} \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_{\nu\gamma} T_{<\alpha\beta>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\gamma T_{<2\beta>}) \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\gamma T_{<\alpha 2>}) - \frac{1}{r^2} \delta_2^\alpha \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} (\partial_\nu T_{<2\beta>}) \\ &\quad + \frac{2}{r^3} \delta_2^\alpha \delta_\nu^1 \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\beta\beta)}} T_{<2\beta>} + \frac{2}{r^4} \delta_2^\alpha \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \delta_\gamma^1 T_{<22>} \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \delta_2^\beta \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} (\partial_\nu T_{<\alpha 2>}) + \frac{2}{r^3} \delta_2^\beta \delta_\nu^1 \delta_\gamma^1 \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} T_{<\alpha 2>}. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Die Transformation der Komponenten $T^{\alpha\beta} = T_{<\alpha\beta>} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)} g^{(\beta\beta)}}$ und deren Ableitungen liefert uns unter Verwendung der Werte der Metrikkoeffizienten die physikalischen Komponenten des Gradienten des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe T . Wir nutzen die lateinischen Indizes i, j, k für die physikalischen Indizes $<\alpha>, <\beta>, <\gamma>$ verwenden und gewinnen zusammenfassend:

Physikalische Komponenten des Gradienten des Gradienten eines Tensors zweiter Stufe:

$$\begin{aligned}
 T^{ij}|_{kl} = & \sqrt{g^{(kk)} g^{(ll)}} (\partial_{kl} T_{ij}) + \frac{1}{r} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} (\partial_r T_{ij}) - \frac{1}{r^2} [\delta_{kr} \delta_{l\varphi} + \delta_{k\varphi} \delta_{lr}] (\partial_\varphi T_{ij}) \\
 & + \frac{1}{r} \delta_{j\varphi} \left[\delta_{k\varphi} \sqrt{g^{(ll)}} (\partial_l T_{ir}) + \delta_{l\varphi} \sqrt{g^{(kk)}} (\partial_k T_{ir}) \right] \\
 & + \frac{1}{r} \delta_{i\varphi} \left[\delta_{k\varphi} \sqrt{g^{(ll)}} (\partial_l T_{rj}) + \delta_{l\varphi} \sqrt{g^{(kk)}} (\partial_k T_{rj}) \right] \\
 & - \frac{1}{r} \delta_{jr} \left[\delta_{k\varphi} \sqrt{g^{(ll)}} (\partial_l T_{i\varphi}) + \delta_{l\varphi} \sqrt{g^{(kk)}} (\partial_k T_{i\varphi}) \right] \\
 & - \frac{1}{r} \delta_{ir} \left[\delta_{k\varphi} \sqrt{g^{(ll)}} (\partial_l T_{\varphi j}) + \delta_{l\varphi} \sqrt{g^{(kk)}} (\partial_k T_{\varphi j}) \right] \\
 & - \frac{1}{r^2} [\delta_{jr} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} + \delta_{j\varphi} \delta_{kr} \delta_{l\varphi} + \delta_{j\varphi} \delta_{k\varphi} \delta_{lr}] T_{ir} \\
 & - \frac{1}{r^2} [\delta_{ir} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} + \delta_{i\varphi} \delta_{kr} \delta_{l\varphi} + \delta_{i\varphi} \delta_{k\varphi} \delta_{lr}] T_{rj} \\
 & + \frac{1}{r^2} [\delta_{jr} \delta_{kr} \delta_{l\varphi} + \delta_{jr} \delta_{k\varphi} \delta_{lr} - \delta_{j\varphi} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi}] T_{i\varphi} \\
 & + \frac{1}{r^2} [\delta_{ir} \delta_{kr} \delta_{l\varphi} + \delta_{ir} \delta_{k\varphi} \delta_{lr} - \delta_{i\varphi} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi}] T_{\varphi j} \\
 & + \frac{2}{r^2} \delta_{i\varphi} \delta_{j\varphi} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} T_{rr} + \frac{2}{r^2} \delta_{ir} \delta_{jr} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} T_{\varphi\varphi} \\
 & - \frac{2}{r^2} \delta_{k\varphi} \delta_{l\varphi} [\delta_{ir} \delta_{j\varphi} T_{\varphi r} + \delta_{i\varphi} \delta_{jr} T_{r\varphi}].
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

Tabelle A.3.: Physikalische Komponenten des doppelten Gradienten $\nabla\nabla T$ eines Tensors zweiter Stufe T

A.5 LAPLACE–Ableitung eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten

Die LAPLACE–Ableitung ΔT eines Tensors zweiter Stufe T ist als die Divergenz des Gradienten definiert:

$$\Delta T := \text{div}(\text{grad}(T)) = \mathbf{g}^\gamma \cdot \partial_\gamma (T^{\alpha\beta}|_{\nu\gamma} \mathbf{g}^\nu \otimes \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta) = T^{\alpha\beta}|_{\nu\gamma} g^{\nu\gamma} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta. \tag{A.75}$$

Wir gewinnen die physikalischen Komponenten der LAPLACE–Ableitung eines Tensors zweiter Stufe:

$$(\Delta T)_{<\alpha\beta>} = (T_{<\alpha\beta>}|_{\nu\gamma} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)} g^{(\beta\beta)}}) g^{\nu\gamma} \sqrt{g^{(\alpha\alpha)} g^{(\beta\beta)}} = T_{<\alpha\beta>}|_{\nu\gamma} g^{\nu\gamma}. \tag{A.76}$$

Die Diagonalform der Metrikkoeffizienten $g^{\nu\gamma}$ liefert die physikalischen Komponenten der LAPLACE–Ableitung eines Tensors zweiter Stufe durch Spurbildung des doppelten Gradienten:

$$(\Delta T)_{<\alpha\beta>} = T_{<\alpha\beta>}|_{\nu\gamma} \delta^\gamma_\nu g^{\nu\nu} = T_{<\alpha\beta>}|_{\nu\gamma} \sqrt{g^{\nu\nu}} \sqrt{g^{\nu\nu}} = T_{<\alpha\beta>}|_{<\nu\nu>}. \tag{A.77}$$

In der folgenden Tabelle A.4 geben wir die physikalischen Komponenten des LAPLACE-Operators eines Tensors zweiter Stufe an und nutzen dabei i, j als Indizes statt $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle$.

Physikalische Komponenten der LAPLACE-Ableitung eines Tensors zweiter Stufe:

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{ij} = & g^{(kk)} (\partial_{kk} T_{ij}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{ij}) + \frac{2}{r^2} \delta_{j\varphi} (\partial_\varphi T_{i1}) + \frac{2}{r^2} \delta_{i\varphi} (\partial_\varphi T_{1j}) - \frac{2}{r^2} \delta_{j1} (\partial_\varphi T_{i\varphi}) \\
 & - \frac{2}{r^2} \delta_{i1} (\partial_\varphi T_{\varphi j}) - \frac{1}{r^2} \delta_{j1} T_{ir} - \frac{1}{r^2} \delta_{i1} T_{rj} - \frac{1}{r^2} \delta_{j\varphi} T_{i\varphi} - \frac{1}{r^2} \delta_{i\varphi} T_{\varphi j} \\
 & + \frac{2}{r^2} \delta_{i\varphi} \delta_{j\varphi} T_{rr} + \frac{2}{r^2} \delta_{i1} \delta_{j1} T_{\varphi\varphi} - \frac{2}{r^2} [\delta_{i1} \delta_{j\varphi} T_{\varphi r} + \delta_{i\varphi} \delta_{j1} T_{r\varphi}] .
 \end{aligned} \tag{A.78}$$

Diagonalkomponenten:

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{rr} = & (\partial_{rr} T_{rr}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{rr}) + (\partial_{zz} T_{rr}) \\
 & + \frac{1}{r} (\partial_r T_{rr}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{r\varphi}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{\varphi r}) - \frac{2}{r^2} T_{rr} + \frac{2}{r^2} T_{\varphi\varphi} ,
 \end{aligned} \tag{A.79}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{\varphi\varphi} = & (\partial_{rr} T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi}) + (\partial_{zz} T_{\varphi\varphi}) \\
 & + \frac{1}{r} (\partial_r T_{\varphi\varphi}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{r\varphi}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{\varphi r}) + \frac{2}{r^2} T_{rr} - \frac{2}{r^2} T_{\varphi\varphi} ,
 \end{aligned} \tag{A.80}$$

$$(\Delta T)_{zz} = (\partial_{rr} T_{zz}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{zz}) + (\partial_{zz} T_{zz}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{zz}) . \tag{A.81}$$

Nebendiagonalkomponenten (obere Hälfte):

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{r\varphi} = & (\partial_{rr} T_{r\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{r\varphi}) + (\partial_{zz} T_{r\varphi}) \\
 & + \frac{1}{r} (\partial_r T_{r\varphi}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{rr}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r^2} T_{r\varphi} - \frac{2}{r^2} T_{\varphi r} ,
 \end{aligned} \tag{A.82}$$

$$(\Delta T)_{rz} = (\partial_{rr} T_{rz}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{rz}) + (\partial_{zz} T_{rz}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{rz}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{\varphi z}) - \frac{1}{r^2} T_{rz} , \tag{A.83}$$

$$(\Delta T)_{\varphi z} = (\partial_{rr} T_{\varphi z}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi z}) + (\partial_{zz} T_{\varphi z}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{\varphi z}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{rz}) - \frac{1}{r^2} T_{\varphi z} . \tag{A.84}$$

Nebendiagonalkomponenten (untere Hälfte):

$$\begin{aligned}
 (\Delta T)_{\varphi r} = & (\partial_{rr} T_{\varphi r}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi r}) + (\partial_{zz} T_{\varphi r}) \\
 & + \frac{1}{r} (\partial_r T_{\varphi r}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{rr}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}) - \frac{2}{r^2} T_{r\varphi} - \frac{2}{r^2} T_{\varphi r} ,
 \end{aligned} \tag{A.85}$$

$$(\Delta T)_{zr} = (\partial_{rr} T_{zr}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{zr}) + (\partial_{zz} T_{zr}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{rz}) - \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{z\varphi}) - \frac{1}{r^2} T_{zr} , \tag{A.86}$$

$$(\Delta T)_{z\varphi} = (\partial_{rr} T_{z\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{z\varphi}) + (\partial_{zz} T_{z\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_r T_{z\varphi}) + \frac{2}{r^2} (\partial_\varphi T_{zr}) - \frac{1}{r^2} T_{z\varphi} . \tag{A.87}$$

Tabelle A.4.: Physikalische Komponenten der LAPLACE-Ableitung ΔT eines Tensors zweiter Stufe T

A.6 Kompatibilitätstensor eines Tensors zweiter Stufe in Zylinderkoordinaten

Der Kompatibilitätstensor \mathcal{C} eines Tensors zweiter Stufe T ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{C}(T) := \nabla \times (\nabla \times T) = \epsilon_{kil} (\nabla \times T)_{jk} \big|_l \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \epsilon_{kil} \epsilon_{pqj} T_{kp} \big|_{ql} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.88})$$

Wir erkennen vier Summationsindizes, lösen diese sukzessive auf und beginnen mit dem Index k :

$$\mathcal{C}_{ij} = \epsilon_{kil} \epsilon_{pqj} T_{kp} \big|_{ql} = \epsilon_{1il} \epsilon_{pqj} T_{1p} \big|_{ql} + \epsilon_{2il} \epsilon_{pqj} T_{2p} \big|_{ql} + \epsilon_{3il} \epsilon_{pqj} T_{3p} \big|_{ql}. \quad (\text{A.89})$$

Bei der Summation über den Index l können wir uns die Struktur des Permutationssymbols ϵ_{ijk} zu nutze machen, denn in allen drei Termen verschwindet einer der zusätzlichen Terme:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij} = & \epsilon_{1i2} \epsilon_{pqj} T_{1p} \big|_{q2} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{pqj} T_{1p} \big|_{q3} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{pqj} T_{2p} \big|_{q1} \\ & + \epsilon_{2i3} \epsilon_{pqj} T_{2p} \big|_{q3} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{pqj} T_{3p} \big|_{q1} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{pqj} T_{3p} \big|_{q2}. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Für die beiden Summationen der Indizes p bzw. q gilt die Argumentation der Indizes k bzw. l weiter:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij} = & \epsilon_{1i2} \epsilon_{1jq} T_{11} \big|_{q2} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{1jq} T_{11} \big|_{q3} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{1jq} T_{21} \big|_{q1} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{1jq} T_{21} \big|_{q3} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{1jq} T_{31} \big|_{q1} \\ & + \epsilon_{3i2} \epsilon_{1jq} T_{31} \big|_{q2} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{2jq} T_{12} \big|_{q2} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{2jq} T_{12} \big|_{q3} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{2jq} T_{22} \big|_{q1} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{2jq} T_{22} \big|_{q3} \\ & + \epsilon_{3i1} \epsilon_{2jq} T_{32} \big|_{q1} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{2jq} T_{32} \big|_{q2} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{3jq} T_{13} \big|_{q2} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{3jq} T_{13} \big|_{q3} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{3jq} T_{23} \big|_{q1} \\ & + \epsilon_{2i3} \epsilon_{3jq} T_{23} \big|_{q3} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{3jq} T_{33} \big|_{q1} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{3jq} T_{33} \big|_{q2} \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

$$\begin{aligned} = & \epsilon_{1i2} \epsilon_{1j2} T_{11} \big|_{22} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{1j2} T_{11} \big|_{23} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{1j2} T_{21} \big|_{21} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{1j2} T_{21} \big|_{23} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{1j2} T_{31} \big|_{21} \\ & + \epsilon_{3i2} \epsilon_{1j2} T_{31} \big|_{22} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{1j3} T_{11} \big|_{32} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{1j3} T_{11} \big|_{33} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{1j3} T_{21} \big|_{31} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{1j3} T_{21} \big|_{33} \\ & + \epsilon_{3i1} \epsilon_{1j3} T_{31} \big|_{31} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{1j3} T_{31} \big|_{32} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{2j1} T_{12} \big|_{12} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{2j1} T_{12} \big|_{13} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{2j1} T_{22} \big|_{11} \\ & + \epsilon_{2i3} \epsilon_{2j1} T_{22} \big|_{13} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{2j1} T_{32} \big|_{11} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{2j1} T_{32} \big|_{12} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{2j3} T_{12} \big|_{32} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{2j3} T_{12} \big|_{33} \\ & + \epsilon_{2i1} \epsilon_{2j3} T_{22} \big|_{31} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{2j3} T_{22} \big|_{33} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{2j3} T_{32} \big|_{31} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{2j3} T_{32} \big|_{32} + \epsilon_{1i2} \epsilon_{3j1} T_{13} \big|_{12} \\ & + \epsilon_{1i3} \epsilon_{3j1} T_{13} \big|_{13} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{3j1} T_{23} \big|_{11} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{3j1} T_{23} \big|_{13} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{3j1} T_{33} \big|_{11} + \epsilon_{3i2} \epsilon_{3j1} T_{33} \big|_{12} \\ & + \epsilon_{1i2} \epsilon_{3j2} T_{13} \big|_{22} + \epsilon_{1i3} \epsilon_{3j2} T_{13} \big|_{23} + \epsilon_{2i1} \epsilon_{3j2} T_{23} \big|_{21} + \epsilon_{2i3} \epsilon_{3j2} T_{23} \big|_{23} + \epsilon_{3i1} \epsilon_{3j2} T_{33} \big|_{21} \\ & + \epsilon_{3i2} \epsilon_{3j2} T_{33} \big|_{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

Durch die Permutationssymbole ist in jedem Term klar, welche Werte die beiden verbleibenden Indizes annehmen dürfen. Wir führen daher KRONECKER-Deltas ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij} = & \delta_{i1} \delta_{j1} (T_{22} \big|_{33} + T_{33} \big|_{22} - T_{23} \big|_{23} - T_{32} \big|_{32}) + \delta_{i1} \delta_{j2} (T_{23} \big|_{13} + T_{31} \big|_{32} - T_{21} \big|_{33} - T_{33} \big|_{12}) \\ & + \delta_{i1} \delta_{j3} (T_{21} \big|_{23} + T_{32} \big|_{12} - T_{22} \big|_{13} - T_{31} \big|_{22}) + \delta_{i2} \delta_{j1} (T_{13} \big|_{23} + T_{32} \big|_{31} - T_{12} \big|_{33} - T_{33} \big|_{21}) \\ & + \delta_{i2} \delta_{j2} (T_{11} \big|_{33} + T_{33} \big|_{11} - T_{13} \big|_{13} - T_{31} \big|_{31}) + \delta_{i2} \delta_{j3} (T_{12} \big|_{13} + T_{31} \big|_{21} - T_{11} \big|_{23} - T_{32} \big|_{11}) \\ & + \delta_{i3} \delta_{j1} (T_{12} \big|_{32} + T_{23} \big|_{21} - T_{13} \big|_{22} - T_{22} \big|_{31}) + \delta_{i3} \delta_{j2} (T_{13} \big|_{12} + T_{21} \big|_{31} - T_{11} \big|_{32} - T_{23} \big|_{11}) \\ & + \delta_{i3} \delta_{j3} (T_{11} \big|_{22} + T_{22} \big|_{11} - T_{12} \big|_{12} - T_{21} \big|_{21}). \end{aligned}$$

Setzen wir hier die Komponenten $T_{ij}|_{kl}$ aus Tabelle A.3 ein und fassen zusammen, so lauten die neun physikalischen Komponenten des Kompatibilitätstensors \mathcal{C} :

Diagonalkomponenten:

$$\mathcal{C}_{rr} = \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{zz}) + (\partial_{zz} T_{\varphi\varphi}) - \frac{1}{r} \partial_{\varphi z} [T_{\varphi z} + T_{z\varphi}] + \frac{1}{r} (\partial_r T_{zz}) - \frac{1}{r} \partial_z [T_{rz} + T_{zr}] \quad (\text{A.93})$$

$$\mathcal{C}_{\varphi\varphi} = (\partial_{rr} T_{zz}) + (\partial_{zz} T_{rr}) - \partial_{rz} [T_{rz} + T_{zr}] \quad (\text{A.94})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{zz} = & (\partial_{rr} T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{rr}) - \frac{1}{r} \partial_{r\varphi} [T_{r\varphi} + T_{\varphi r}] - \frac{1}{r} (\partial_r T_{rr}) + \frac{2}{r} (\partial_r T_{\varphi\varphi}) \\ & - \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi} [T_{r\varphi} + T_{\varphi r}] \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Nebendiagonalkomponenten (obere Hälfte):

$$\mathcal{C}_{r\varphi} = -(\partial_{zz} T_{\varphi r}) - \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{zz}) + (\partial_{rz} T_{\varphi z}) + \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{zr}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{zz}) - \frac{1}{r} (\partial_z T_{z\varphi}) \quad (\text{A.96})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{rz} = & -\frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{rz}) + \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{z\varphi}) - (\partial_{rz} T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{\varphi r}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{z\varphi}) \\ & + \frac{1}{r} (\partial_z T_{rr}) - \frac{1}{r} (\partial_z T_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\varphi z} = & -(\partial_{rr} T_{z\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{zr}) + (\partial_{rz} T_{r\varphi}) - \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{rr}) - \frac{1}{r} (\partial_r T_{z\varphi}) - \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{zr}) \\ & + \frac{1}{r} \partial_z [T_{r\varphi} + T_{\varphi r}] + \frac{1}{r^2} T_{z\varphi} . \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Nebendiagonalkomponenten (untere Hälfte):

$$\mathcal{C}_{\varphi r} = -(\partial_{zz} T_{r\varphi}) - \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{zz}) + (\partial_{rz} T_{z\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{rz}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{zz}) - \frac{1}{r} (\partial_z T_{\varphi z}) \quad (\text{A.99})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{zr} = & -\frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi\varphi} T_{rz}) + \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{\varphi z}) - (\partial_{rz} T_{\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{r\varphi}) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{\varphi z}) \\ & + \frac{1}{r} (\partial_z T_{rr}) - \frac{1}{r} (\partial_z T_{\varphi\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{z\varphi} = & -(\partial_{rr} T_{\varphi z}) + \frac{1}{r} (\partial_{r\varphi} T_{rz}) + (\partial_{rz} T_{\varphi r}) - \frac{1}{r} (\partial_{\varphi z} T_{rr}) - \frac{1}{r} (\partial_r T_{\varphi z}) - \frac{1}{r^2} (\partial_{\varphi} T_{rz}) \\ & + \frac{1}{r} \partial_z [T_{r\varphi} + T_{\varphi r}] + \frac{1}{r^2} T_{\varphi z} \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Tabelle A.5.: physikalische Komponenten des Kompatibilitätstensors \mathcal{C}

A.7 Gradient eines Tensors dritter Stufe in Zylinderkoordinaten

Der Gradient eines Tensors dritter Stufe μ ist als dyadisches Produkt des Nabla-Operators ∇ mit dem Tensor μ definiert. Bezüglich Zylinderkoordinaten (r, φ, z) erhalten wir die Komponentendarstellung:

$$\text{grad}(\mu) \equiv \nabla \mu := \nabla \otimes \mu = g^\alpha \otimes \partial_\alpha (\mu_\beta^{\gamma\delta} g^\beta \otimes g_\gamma \otimes g_\delta) = \mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha g^\alpha \otimes g^\beta \otimes g_\gamma \otimes g_\delta. \quad (\text{A.102})$$

Wir konzentrieren uns auf die Komponenten und beginnen mit der Definition der kovarianten Ableitung:

$$\mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha = \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \mu_\nu^{\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \mu_\beta^{\nu\delta} + \Gamma_{\alpha\nu}^\delta \mu_\beta^{\gamma\nu}. \quad (\text{A.103})$$

Als nächstes führen wir die Summation über ν explizit aus und erhalten:

$$\mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha = \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) - (\Gamma_{\alpha\beta}^1 \mu_1^{\gamma\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \mu_2^{\gamma\delta}) + (\Gamma_{\alpha 1}^\gamma \mu_\beta^{1\delta} + \Gamma_{\alpha 2}^\gamma \mu_\beta^{2\delta}) + (\Gamma_{\alpha 1}^\delta \mu_\beta^{\gamma 1} + \Gamma_{\alpha 2}^\delta \mu_\beta^{\gamma 2}). \quad (\text{A.104})$$

Die besondere Struktur der Christoffelsymbole $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ (vgl. Gl. (A.17)) lässt uns weiter auswerten:

$$\begin{aligned} \mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha &= \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \Gamma_{22}^1 \mu_1^{\gamma\delta} - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \Gamma_{12}^2 \mu_2^{\gamma\delta} - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \Gamma_{21}^2 \mu_2^{\gamma\delta} + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \Gamma_{21}^1 \mu_\beta^{1\delta} \\ &\quad + \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \Gamma_{12}^1 \mu_\beta^{2\delta} + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \Gamma_{22}^1 \mu_\beta^{2\delta} + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \Gamma_{21}^2 \mu_\beta^{\gamma 1} + \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \Gamma_{12}^2 \mu_\beta^{\gamma 2} + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \Gamma_{22}^1 \mu_\beta^{\gamma 2} \\ \mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha &= \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) + r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_1^{\gamma\delta} - \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_2^{\gamma\delta} - \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_2^{\gamma\delta} + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{1\delta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{2\delta} - r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_\beta^{2\delta} + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{\gamma 1} + \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{\gamma 2} - r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_\beta^{\gamma 2}. \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Da wir das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Modell in physikalischen Komponenten formulieren, führen wir nun die physikalischen Komponenten des Gradienten nach den Gln. (A.13) bzw. (A.14) ein:

$$\mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} |_{<\alpha>} = \mu_\beta^{\gamma\delta} |_\alpha \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \quad (\text{A.106})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad + r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_1^{\gamma\delta} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad - \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_2^{\gamma\delta} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad - \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_2^{\gamma\delta} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{1\delta} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{2\delta} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad - r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_\beta^{2\delta} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{(\delta\delta)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{\gamma 1} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{22}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_\beta^{\gamma 2} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{22}} \\ &\quad - r \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_\beta^{\gamma 2} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g_{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Einsetzen der Werte $\sqrt{g_{11}} = \sqrt{g^{11}} = 1$, $\sqrt{g_{22}} = r$ bzw. $\sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r}$ liefert weiter:

$$\begin{aligned} \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>}|_{<\alpha>} &= \left(\partial_\alpha \mu_\beta^{\gamma\delta} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_1^{\gamma\delta} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_2^{\gamma\delta} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} - \frac{1}{r^2} \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_2^{\gamma\delta} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_2^\gamma \mu_\beta^{1\delta} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} + \delta_\alpha^1 \delta_2^\gamma \mu_\beta^{2\delta} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} \\ &\quad - \delta_\alpha^2 \delta_1^\gamma \mu_\beta^{2\delta} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} + \frac{1}{r} \delta_\alpha^2 \delta_2^\delta \mu_\beta^{\gamma 1} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \\ &\quad + \delta_\alpha^1 \delta_2^\delta \mu_\beta^{\gamma 2} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} - \delta_\alpha^2 \delta_1^\delta \mu_\beta^{\gamma 2} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}}. \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Als letzten Schritt transformieren wir die Tensorkomponenten $\mu_\beta^{\gamma\delta} = \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \sqrt{g^{(\delta\delta)}}$:

$$\begin{aligned} \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>}|_{<\alpha>} &= \left(\partial_\alpha \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} + \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \left(\partial_{<\alpha>} \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \right) \sqrt{g^{(\beta\beta)}} \\ &\quad + \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \left(\partial_{<\alpha>} \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} \right) \sqrt{g^{(\gamma\gamma)}} + \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \left(\partial_{<\alpha>} \sqrt{g^{(\delta\delta)}} \right) \sqrt{g^{(\delta\delta)}} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_{<1>}^{<\gamma\delta>} - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \mu_{<2>}^{<\gamma\delta>} - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_{<2>}^{<\gamma\delta>} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\alpha^2 \delta_2^\gamma \mu_{<\beta>}^{<1\delta>} + \delta_\alpha^1 \delta_2^\gamma \mu_{<\beta>}^{<2\delta>} - \delta_\alpha^2 \delta_1^\gamma \mu_{<\beta>}^{<2\delta>} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\alpha^2 \delta_2^\delta \mu_{<\beta>}^{<\gamma 1>} + \delta_\alpha^1 \delta_2^\delta \mu_{<\beta>}^{<\gamma 2>} - \delta_\alpha^2 \delta_1^\delta \mu_{<\beta>}^{<\gamma 2>} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Ausnutzen der Abhängigkeiten der Metrikoeffizienten $g^{\alpha\beta} = \hat{g}^{\alpha\beta}(r)$ ergibt für die drei ersten Terme, die proportional zu einer Tensorkomponente $\mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>}$ sind, ein negatives Vorzeichen und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>}|_{<\alpha>} &= \left(\partial_\alpha \mu_{<\beta>}^{<\gamma\delta>} \right) \sqrt{g^{(\alpha\alpha)}} + \frac{1}{r} \left(\delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \mu_{<1>}^{<\gamma\delta>} - \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \mu_{<2>}^{<\gamma\delta>} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\alpha^2 \delta_2^\gamma \mu_{<\beta>}^{<1\delta>} - \delta_\alpha^2 \delta_1^\gamma \mu_{<\beta>}^{<2\delta>} \right. \\ &\quad \left. + \delta_\alpha^2 \delta_2^\delta \mu_{<\beta>}^{<\gamma 1>} - \delta_\alpha^2 \delta_1^\delta \mu_{<\beta>}^{<\gamma 2>} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

Verwenden wir die lateinischen Indizes l, i, j, k statt der physikalischen Indizes $<\alpha>, <\beta>, <\gamma>, <\delta>$ und die Zuordnung der Indizes $<1> = r$ sowie $<2> = \varphi$, so lauten die physikalischen Komponenten des Gradienten eines Tensors dritter Stufe in Abhängigkeit der physikalischen Komponenten des Tensors:

Allgemeine physikalische Komponenten des Gradienten eines Tensors dritter Stufe:

$$\mu_{ijk}|_l = \left(\partial_l \mu_{ijk} \right) \sqrt{g^{(ll)}} - \frac{1}{r} \delta_l^\varphi \left(\delta_i^r \mu_{\varphi jk} - \delta_i^\varphi \mu_{rjk} + \delta_j^r \mu_{i\varphi k} - \delta_j^\varphi \mu_{irk} + \delta_k^r \mu_{ij\varphi} - \delta_k^\varphi \mu_{ijr} \right). \quad (\text{A.111})$$

Tabelle A.6.: Physikalische Komponenten des Gradienten $\nabla \mu$ eines Tensors dritter Stufe μ

A.8 Divergenz eines Tensors dritter Stufe in Zylinderkoordinaten

Die physikalischen Komponenten der Divergenz $\nabla \cdot \mu$ eines Tensors dritter Stufe μ lauten:

$$\operatorname{div}[\mu] = (\nabla \cdot \mu)_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = \mu_{ijk}|_i \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.112})$$

Setzen wir hier die Komponenten $\mu_{jkl}|_i$ aus Tabelle A.6 ein und fassen zusammen, so lauten die neun physikalischen Komponenten der Divergenz eines Tensors dritter Stufe:

Allgemeine physikalische Komponenten der Divergenz eines Tensors dritter Stufe:

$$(\nabla \cdot \mu)_{jk} = (\partial_i \mu_{ijk}) \sqrt{g^{(ii)}} + \frac{1}{r} (\mu_{rjk} - \delta_j^r \mu_{\varphi\varphi k} + \delta_j^\varphi \mu_{\varphi r k} - \delta_k^r \mu_{\varphi j \varphi} + \delta_k^\varphi \mu_{\varphi j r}). \quad (\text{A.113})$$

Diagonalkomponenten:

$$(\nabla \cdot \mu)_{rr} = (\partial_r \mu_{rrr}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi rr}) + (\partial_z \mu_{zrr}) + \frac{1}{r} (\mu_{rrr} - \mu_{\varphi\varphi r} - \mu_{\varphi r \varphi}), \quad (\text{A.114})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{\varphi\varphi} = (\partial_r \mu_{r\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi\varphi}) + (\partial_z \mu_{z\varphi\varphi}) + \frac{1}{r} (\mu_{r\varphi\varphi} + \mu_{\varphi r \varphi} + \mu_{\varphi\varphi r}), \quad (\text{A.115})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{zz} = (\partial_r \mu_{rzz}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi zz}) + (\partial_z \mu_{zzz}) + \frac{1}{r} \mu_{rzz}. \quad (\text{A.116})$$

Nebendiagonalkomponenten (obere Hälfte):

$$(\nabla \cdot \mu)_{r\varphi} = (\partial_r \mu_{rr\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi r \varphi}) + (\partial_z \mu_{zr \varphi}) + \frac{1}{r} (\mu_{rr\varphi} - \mu_{\varphi\varphi r} + \mu_{\varphi rr}), \quad (\text{A.117})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{rz} = (\partial_r \mu_{rrz}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi rz}) + (\partial_z \mu_{zrz}) + \frac{1}{r} (\mu_{rrz} - \mu_{\varphi\varphi z}), \quad (\text{A.118})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{\varphi z} = (\partial_r \mu_{r\varphi z}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi z}) + (\partial_z \mu_{z\varphi z}) + \frac{1}{r} (\mu_{r\varphi z} + \mu_{\varphi rz}). \quad (\text{A.119})$$

Nebendiagonalkomponenten (untere Hälfte):

$$(\nabla \cdot \mu)_{\varphi r} = (\partial_r \mu_{r\varphi r}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi r}) + (\partial_z \mu_{z\varphi r}) + \frac{1}{r} (\mu_{\varphi\varphi r} + \mu_{\varphi rr} - \mu_{\varphi\varphi\varphi}), \quad (\text{A.120})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{zr} = (\partial_r \mu_{rzz}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi zr}) + (\partial_z \mu_{zzr}) + \frac{1}{r} (\mu_{rzz} - \mu_{\varphi\varphi z}), \quad (\text{A.121})$$

$$(\nabla \cdot \mu)_{z\varphi} = (\partial_r \mu_{rzz\varphi}) + \frac{1}{r} (\partial_\varphi \mu_{\varphi\varphi z\varphi}) + (\partial_z \mu_{zz\varphi z}) + \frac{1}{r} (\mu_{rzz\varphi} + \mu_{\varphi zr}). \quad (\text{A.122})$$

Tabelle A.7.: physikalische Komponenten der Divergenz $\nabla \cdot \mu$ eines Tensors dritter Stufe μ

B Implementierung in FEAP

Wir wollen im Rahmen dieser Arbeit das in Tabelle 4.1 dargestellte Gleichungssystem in der Finite-Elemente-Software FEAP umsetzen. Zwar bietet FEAP diverse implementierte Modelle zur Auswahl, das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Modell jedoch nicht. Das zu lösende lineare Gleichungssystem besitzt folgende Form:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F} . \quad (\text{B.1})$$

Der Aufbau der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und des Lastvektors \mathbf{F} des Gleichungssystems hängt von der Reihenfolge der Einträge des Lösungsvektors \mathbf{x} ab. Die Wahl der Reihenfolge der Einträge des Lösungsvektor \mathbf{x} obliegt hierbei alleine dem Benutzer. Wir sortieren die Einträge des Lösungsvektors \mathbf{x} derart, dass wir alle Knotenwerte der Freiheitsgrade eines Knotens A aufführen, bevor wir zu den Knotenwerten des nächsten Knotens $A + 1$ übergehen:

$$\mathbf{x} \triangleq (u_1^1, u_2^1, \Psi_{11}^1, \Psi_{22}^1, \Psi_{12}^1, u_1^2, u_2^2, \Psi_{11}^2, \dots)^T . \quad (\text{B.2})$$

Die Software FEAP stellt Algorithmen zur Assemblierung des Gleichungssystems (B.1) aus **Userelement** genannten lokalen Gleichungssystemen $\tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}}$ zur Verfügung. Der Benutzer muss für jedes finite Element das lokale Gleichungssystem implementieren. Den lokalen Lösungsvektor $\tilde{\mathbf{x}}^{(A)}$ eines Knotens A definieren wir analog dem Lösungsvektor \mathbf{x} :

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(A)} \triangleq (u_1^{(A)}, u_2^{(A)}, \Psi_{11}^{(A)}, \Psi_{22}^{(A)}, \Psi_{12}^{(A)})^T . \quad (\text{B.3})$$

Wir wollen den Aufbau des lokalen Gleichungssystems exemplarisch an einem Vierknotenelement mit fünf Freiheitsgraden nachvollziehen. Diese Diskussion werden wir in zwei Schritten führen, denn der Aufbau des lokalen Gleichungssystems besitzt zwei Strukturen: Die Beschreibung der Wechselwirkung einzelner Knoten miteinander und die Beschreibung des Einflusses der Freiheitsgrade. Die Grobstruktur zur Beschreibung der Wechselwirkung der Knoten ergibt beispielsweise das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}^{(1,1)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(1,2)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(1,3)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(1,4)} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(2,1)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2,2)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2,3)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(2,4)} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(3,1)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(3,2)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(3,3)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(3,4)} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(4,1)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(4,2)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(4,3)} & \tilde{\mathbf{K}}^{(4,4)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{x}}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} \\ \tilde{\mathbf{F}}^{(3)} \\ \tilde{\mathbf{F}}^{(4)} \end{pmatrix} . \quad (\text{B.4})$$

Jede einzelne dieser in unserem Beispiel $4 \times 4 = 16$ Blockmatrizen $\tilde{\mathbf{K}}^{(B,A)}$ beschreibt den Einfluss des lokalen Lösungsvektors $\tilde{\mathbf{x}}^{(A)}$ des Knotens A auf den Vektor $\tilde{\mathbf{F}}^{(B)}$ des Knotens B :

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(B,A)} \cdot \tilde{\mathbf{x}}^{(A)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(B)} . \quad (\text{B.5})$$

Hierbei und im Folgenden verwenden wir die EINSTEINSche Summenkonvention für jegliche Indizes. Betrachten wir nun diese Matrizengleichung genauer, so fällt wiederum eine allgemeine Struktur auf:

$$\tilde{K}_{IJ}^{(B,A)} \tilde{x}_J^{(A)} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11}^{(B,A)} & \tilde{K}_{12}^{(B,A)} & \tilde{K}_{13}^{(B,A)} & \tilde{K}_{14}^{(B,A)} & \tilde{K}_{15}^{(B,A)} \\ \tilde{K}_{21}^{(B,A)} & \tilde{K}_{22}^{(B,A)} & \tilde{K}_{23}^{(B,A)} & \tilde{K}_{24}^{(B,A)} & \tilde{K}_{25}^{(B,A)} \\ \tilde{K}_{31}^{(B,A)} & \tilde{K}_{32}^{(B,A)} & \tilde{K}_{33}^{(B,A)} & \tilde{K}_{34}^{(B,A)} & \tilde{K}_{35}^{(B,A)} \\ \tilde{K}_{41}^{(B,A)} & \tilde{K}_{42}^{(B,A)} & \tilde{K}_{43}^{(B,A)} & \tilde{K}_{44}^{(B,A)} & \tilde{K}_{45}^{(B,A)} \\ \tilde{K}_{51}^{(B,A)} & \tilde{K}_{52}^{(B,A)} & \tilde{K}_{53}^{(B,A)} & \tilde{K}_{54}^{(B,A)} & \tilde{K}_{55}^{(B,A)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(A)} \\ \tilde{x}_2^{(A)} \\ \tilde{x}_3^{(A)} \\ \tilde{x}_4^{(A)} \\ \tilde{x}_5^{(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_1^{(B)} \\ \tilde{F}_2^{(B)} \\ \tilde{F}_3^{(B)} \\ \tilde{F}_4^{(B)} \\ \tilde{F}_5^{(B)} \end{pmatrix} = \tilde{F}_I^{(B)} . \quad (\text{B.6})$$

Jede einzelne Blockmatrix $\tilde{K}^{(B,A)}$ besitzt in diesem Beispiel 5×5 Einträge um den Einfluss je eines der fünf Freiheitsgrade $\tilde{x}_i^{(A)}$ des Knotens A auf eine der fünf Komponenten $\tilde{F}_j^{(B)}$ des Knotens B zu beschreiben. Auf Basis dieser exemplarischen Betrachtung eines Vierknotenelementes mit je fünf Freiheitsgraden pro Knoten diskutieren wir nun den allgemeinen Aufbau des lokalen Gleichungssystems

$$\tilde{K} \cdot \tilde{x} = \tilde{F} . \quad (\text{B.7})$$

Die Koeffizientenmatrix \tilde{K} wird auch **Elementsteifigkeitsmatrix** genannt. Entsprechend wollen wir vom **Elementlastvektor** \tilde{F} sprechen. Tabelle 4.1 liefert uns die Grundlage, dieses Gleichungssystem für das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Modell zu implementieren. Die auftretenden Randintegrale werden von FEAP automatisch aus den Randbedingungen erzeugt. Daher müssen lediglich die Elementsteifigkeitsmatrizen explizit implementiert werden.

Es fällt auf, dass die Koeffizientenmatrizen (4.23), (4.24), (4.25) sowie (4.26) mehr Indizes besitzen als uns die Komponenten $\tilde{K}_{IJ}^{(B,A)}$ der Elementsteifigkeitsmatrix zur Verfügung stellen. Die Verknüpfung dieser beiden Indizierungen gewinnen wir durch Berücksichtigen der Struktur des lokalen Gleichungssystems. Der lokale Lösungsvektor \tilde{x} soll derart aufgebaut sein, dass erst die n_{dof} Freiheitsgrade von Knoten A berücksichtigt werden, bevor wir die n_{dof} Freiheitsgrade von Knoten $A + 1$ betrachten. Das heißt jedes mal, wenn wir den Knotenindex um 1 erhöhen, müssen wir in der Steifigkeitsmatrix um n_{dof} Einträge weiter gehen, um beim entsprechenden Freiheitsgrad des nächsten Knotens zu landen. Das gilt sowohl für die Indizierung der Zeilen als auch für die Indizierung der Spalten. Um beispielsweise den Eintrag des vierten Freiheitsgrades des dritten Knotens zu betrachten, müssen wir die Einträge der insgesamt $2n_{\text{dof}}$ Freiheitsgrade der ersten beiden Knoten und zusätzlich die Einträge der ersten drei Freiheitsgrade des dritten Knotens überspringen.

Dieses Verhalten lässt sich allgemein formulieren und wir wollen mit der allgemeinen Indizierung eines Verschiebungsfreiheitsgrades aus Tabelle 4.1 beginnen. Hierfür müssen wir aus einem Indexpaar (m, A) einen einzelnen Index $J(m, A)$ für das lokale Gleichungssystem bestimmen. Wir müssen den Faktor für den Knotenindex dabei leicht modifizieren, da Knotenindizes bei 1 starten.

Mit der Anzahl n_{dof} der Freiheitsgrade und der Anzahl n_{dim} der räumlichen Dimensionen erhalten wir zusammen mit der Menge \mathcal{K}^u aller Knoten mit Verschiebungsfreiheitsgrad den Multiindex J :

$$J : \{1, \dots, n_{\text{dim}}\} \times \mathcal{K}^u \rightarrow \mathbb{N} : (m, A) \mapsto J(m, A) = n_{\text{dof}} \cdot (A - 1) + m . \quad (\text{B.8})$$

Diese Transformation der Indizes gilt allgemein. Für ein zweidimensionales Vierknotenelement mit fünf Freiheitsgraden, wie wir es beabsichtigen zu implementieren, ergibt sich folgende Tabelle:

J	1	2	6	7	11	12	16	17
m	1	2	1	2	1	2	1	2
A	1	1	2	2	3	3	4	4

Tabelle B.1.: Multiindex der Verschiebung u eines Vierknotenelementes mit $n_{\text{dim}} = 2$ und $n_{\text{dof}} = 5$

Die Transformation der Indizierung eines Mikrodehnungsfreiheitsgrades aus Tabelle 4.1 gestaltet sich ein wenig komplizierter. Hier müssen wir aus einem Indextripel (m, n, A) einen einzelnen Index $P(m, n, A)$ gewinnen. Die Grundüberlegung ist ähnlich der Situation der Verschiebungsfreiheitsgrade. Um beispielsweise zum Eintrag des zweiten Mikrodehnungsfreiheitsgrades des fünften Knotens zu gelangen, müssen wir die Einträge der $4n_{\text{dof}}$ Freiheitsgrade der ersten vier Knoten und zusätzlich die n_{dim} Einträge der Verschiebungsfreiheitsgrade überspringen. Hier verkompliziert sich aber die Situation, da wir aus den zwei Indizes des Tensors Ψ einen weiteren Multiindex ι bestimmen müssen, der uns die weitere Modifikation des gesuchten Eintrags liefert. Für zweidimensionale symmetrische Probleme definieren wir

$$\iota : \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\} \rightarrow \mathbb{N} : (j, k) \mapsto \iota(j, k) := 2(k - j) + j \quad (\text{B.9})$$

und können somit den Multiindex P eines Mikrodehnungsfreiheitsgrades Ψ angeben:

$$P : \{1, \dots, n_{\text{dim}}\}^2 \times \mathcal{K}^\Psi \rightarrow \mathbb{N} : (m, n, A) \mapsto P(m, n, A) = n_{\text{dof}} \cdot (A - 1) + 2 + \iota(m, n) . \quad (\text{B.10})$$

Auch für diese Indextransformation wollen wir eine zu Tabelle B.1 analoge Tabelle angeben:

P	3	4	5	8	9	10	13	14	15	18	19	20
(m, n)	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(1,1)	(2,2)	(1,2)
A	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4

Tabelle B.2.: Multiindex der Mikrodehnung Ψ eines Vierknotenelementes mit $n_{\text{dim}} = 2$ und $n_{\text{dof}} = 5$

Mit den Multiindizes (B.8) und (B.10) haben wir das Rüstzeug, um das lokale Gleichungssystem der Finite-Elemente-Methode, das heißt die Elementsteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}$ und den Elementlastvektor $\tilde{\mathbf{F}}$, mit Hilfe von Tabelle 4.1 direkt zu implementieren..

Erklärung: Der Lebenslauf ist in der Online-Version aus Gründen des Datenschutzes nicht enthalten.